# 1 Уравнения Бельтрами переменного типа, А.Н. Кондрашов, 22 февраля, 7 марта 2008



**Аннотация.** *Работа посвящена исследованию уравнения Бельтрами переменного типа. Введено два вида решений таких уравнений, между которыми исследованы взаимосвязи. Изучены вопросы существования и единственности данных решений.*

## 1.1 Уравнения Бельтрами переменного типа

**1.** Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область и в ней задано уравнение Бельтрами (см., например, [1])

$$f_{\overline{z}}(z) = \mu(z) f_z(z). \tag{1}$$

Всюду далее: $z = x_1 + ix_2$, $w = u_1 + iu_2$; $B_r(z)$ — круг радиуса $r > 0$ с центром в $z$; пространства $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{C}$ отождествляются; $\mathrm{dist}(z, A)$ — расстояние от точки $z$ до множества $A$; $\mathrm{mes}_2 E$ — двумерная мера Лебега множества $E \subset \mathbb{R}^2$. Функция $\mu(z)$ всюду предполагается измеримой и такой, что $|\mu(z)| \neq 1$ почти всюду в $D$.

Если почти всюду в $D$ выполнено $|\mu(z)| < 1$, то мы имеем классический случай уравнения Бельтрами. Если существуют подобласти $D$ в которых почти всюду выполнено $|\mu(z)| < 1$, и существуют подобласти $D$ в которых почти всюду $|\mu(z)| > 1$, то мы будем говорить, что уравнение имеет переменный тип (alternating [9]).

Чтобы предусмотреть также возможность $\mu(z) = \infty$ в $D$, будем рассматривать уравнение Бельтрами записанное в виде

$$A(z) f_z(z) + B(z) f_{\overline{z}}(z) = 0, \tag{2}$$

где $A(z)$, $B(z)$ — конечные измеримые комплекснозначные функции, не обращающиеся одновременно в нуль в $D$:

$$|A(z)| + |B(z)| > 0.$$

Рассматривая уравнение (2) в дальнейшем предполагаем, что $|A(z)| \neq |B(z)|$ почти всюду в $D$, причем имеются подобласти в которых почти всюду $|A(z)| < |B(z)|$, и подобласти, в которых почти всюду $|A(z)| > |B(z)|$.

В некоторых случаях на пару функций $A(z), B(z)$ будет накладываться следующее дополнительное условие

$$|A(z)| + |B(z)| = 1. \tag{3}$$

Договоримся в дальнейшем, говоря об уравнении Бельтрами заданном в виде (1), считать, что $|\mu(z)| < +\infty$ почти всюду в $D$.

**2.** Сформулируем теперь определение решения для уравнений (1) и (2) переменного типа. В отличие от классического случая уравнения Бельтрами (не меняющего тип) мы введем сразу два определения этого понятия.

**Определение 1.** *Непрерывную функцию $f(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, удовлетворяющую уравнению* (1) *почти всюду в $D$, будем называть решением* 1-го вида *данного уравнения.*

Решения 1-го вида суть решения в традиционном смысле.

Наряду с этим определением дадим еще одно.

**Определение 2.** *Непрерывную функцию* $f(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, *удовлетворяющую уравнению* (1) *почти всюду в* $D$ *где* $|\mu(z)| < 1$, *и такую, что почти всюду в* $D$ *где* $|\mu(z)| > 1$, *уравнению* (1) *удовлетворяет функция* $\overline{f(z)}$, *будем называть решением* 2-го вида *данного уравнения.*

Для уравнения (2) эти определения можно переформулировать следующим образом.

**Определение 3.** *Непрерывную функцию* $f(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, *удовлетворяющую уравнению* (2) *почти всюду в* $D$, *будем называть решением* 1-го вида данного уравнения.

**Определение 4.** *Непрерывную функцию* $f(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, *удовлетворяющую уравнению* (2) *почти всюду в* $D$, *где* $|A(z)| < |B(z)|$, *и такую, что почти всюду в* $D$ *где* $|A(z)| > |B(z)|$, *уравнению* (2) *удовлетворяет функция* $\overline{f(z)}$, *будем называть решением* 2-го вида *данного уравнения.*

Хорошо известно, что в случае уравнения Бельтрами, не меняющего тип, справедливость условия

$$\operatorname*{ess\,sup}_{D'} |\mu(z)| < 1,$$

для произвольной подобласти $D' \Subset D$, влечет существование гомеоморфного решения класса $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$, причем обратное к нему отображение также принадлежит $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$.

В дальнейшем мы также допускаем возможность особенности у решений $f(z)$. В связи с этим дадим еще одно определение.

**Определение 5.** *Пусть существует замкнутое относительно* $D$ *множество* $\Gamma \subset D$ *меры* $\mathrm{mes}_2\Gamma = 0$. *Если непрерывная в* $D$ *функция* $f(z)$, *удовлетворяет уравнению* (1) *в смысле определения* 1 (*соответственно, определения* 2) *в* $D \setminus \Gamma$ [1], *то функцию* $f(z)$ *будем называть* решением 1-го вида (*соответственно*, 2-го вида) с особенностью $\Gamma$ *данного уравнения.*

Аналогично определяется решение с особенностью для уравнения Бельтрами заданного в виде (2).

В дальнейшем мы увидим, что наличие особенностей у решений характерно для вырождающихся уравнений.

Введение двух определений понятия решения уравнения Бельтрами переменного типа диктуется тем, что оказывается весьма просто получение необходимых и достаточных условий существования и единственности решений 2-го вида. По сути, установление соответствующих теорем сводится к уже имеющимся теоремам для классического случая $|\mu(z)| < 1$. В то же время каких-либо методов установления существования и единственности решений 1-го вида уравнений переменного типа в настоящее время практически известно мало. Целью настоящего исследования является выяснение связей между решениями обоих видов.

Отправной точкой для нас является следующий результат (см. [2] или в наиболее близкой форме [5]).

**Теорема 1**. *Предположим, что* $\mu(z) : D \to \mathbb{C}$ — *измеримая функция, такая, что* $|\mu| < 1$ *почти всюду в* $D$ *и функция*

$$P_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}$$

*является локально* $W^{1,2}$*-мажорируемой* [2] *в* $D$ .

[1] При этом не известна принадлежность $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$.

[2] То есть такой, что для любой подобласти $D' \Subset D$ найдется функция $K(z) \in W^{1,2}(D')$, такая, что $P_\mu(z) \le K(z)$ почти всюду в $D'$.

*Тогда существует гомеоморфизм $w = f(z) : D \to f(D) \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющий уравнению (1) почти всюду в $D$, такой, что $f(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$ и $f^{-1}(w) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D))$.*

*Гомеоморфизм $w = f(z)$ единственный с точностью до конформного отображения в $w$-плоскости.*

**Замечание 1.** Пусть $(p(z), \theta(z))$ характеристики Лаврентьева отображения $w = f(z)$. Заметим, что $p(z) = P_\mu(z)$.

Из теоремы 1 получается следующее утверждение для уравнения переменного типа, гарантирующее существование решений 2-го вида.

**Теорема 2**. *Предположим, что измеримые функции $A(z), B(z) : D \to \mathbb{C}$ $(|A(z)| + |B(z)| > 0)$ таковы, что функция*

$$P_{(A,B)}(z) = \frac{|A(z)| + |B(z)|}{||A(z)| - |B(z)||}$$

*является локально $W^{1,2}$-мажорируемой в $D$. Тогда существует гомеоморфизм $w = f(z) : D \to f(D) \subset \mathbb{C}$ со свойствами:*

*(i) $f(z)$ суть решение второго вида уравнения Бельтрами (2);*

*(ii) $f^{-1}(w) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D))$.*

*Гомеоморфизм $w = f(z)$ единственный с точностью до конформного отображения в $w$-плоскости.*

В дальнейшем, в связи с этими теоремами, мы будем называть всякое отображение $w = f(z)$ у которого первая характеристика Лаврентьева $p(z)$ локально $W^{1,2}$-мажорируема "*отображением с $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-мажорируемой первой характеристикой*".

**3.** Приведем примеры уравнений Бельтрами переменного типа и решений 1-го и 2-го вида.

**Пример 1.** Пусть $S$ — поверхность заданная отображением $y = \mathrm{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x)) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $(x = (x_1, x_2))$, двулистно проецируемая на область $\Omega \subset \mathbb{R}^2_{(y_1,y_2)} \subset \mathbb{R}^3$ (см. рис. 1). Пусть $S_1$ и $S_2$ — соответственно верхняя и нижняя части $S$, склеенные по кривой $\Gamma_1$, а $\Gamma = \mathrm{f}^{-1}(\Gamma_1)$ — ее прообраз в $D$. Пусть $D_1 = \mathrm{f}^{-1}(S_1)$, $D_2 = \mathrm{f}^{-1}(S_2)$ и $\mathrm{f}(x) \in C^1(D_i)$, $i = 1, 2$. Пусть, кроме того, ориентация на $S$ согласована с ориентацией из $D$, причем на $S_1$ она определяется нормалью к поверхности направленной вверх, а на $S_2$ — вниз.

Рассмотрим отображение $w = f(z) = f_1(z) + if_2(z) : D \to \Omega$ $(z = x_1 + ix_2)$. Положим $\mu(z) = \frac{f_{\overline{z}}}{f_z}$. Тогда $|\mu(z)| < 1$ в $D_1$ и $|\mu(z)| > 1$ в $D_2$. Мы получили пример решения 1-го вида.

**Пример 2.** Пусть $f(z) : D \to \mathbb{C}$ — решение некоторого классического (с $|\mu_0(z)| < 1$ почти всюду в $D$) уравнения Бельтрами

$$f_{\overline{z}} = \mu_0(z) f_z.$$

Разобьем произвольно область $D$ на две подобласти $D_1$ и $D_2$. Положим

$$\mu(z) = \begin{cases} \mu_0(z) & \text{при } z \in D_1, \\ 1/\overline{\mu_0}(z) & \text{при } z \in D_2. \end{cases}$$

Тогда $|\mu(z)| < 1$ почти всюду в $D_1$, и $|\mu(z)| > 1$ почти всюду в $D_2$, а $f(z)$ — решение 2-го вида уравнения

$$f_{\overline{z}}(z) = \mu(z) f_z(z).$$

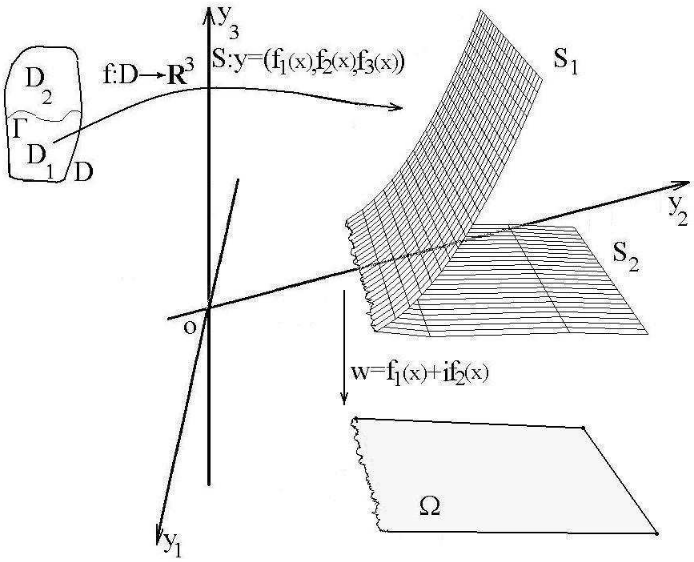


Рис. 1: Двулистно проецируемая поверхность

## 1.2 Стандартные складки, $\delta$-деформации

Введем некоторые необходимые в дальнейшем отображения.

**1.** Нам понадобится следующее отображение

$$\mathcal{B}(z) = x_1 + i|x_2| : \mathbb{C} \to \{\mathrm{Im}\, w > 0\} \subset \mathbb{C}.$$

Следуя Ю.Ю. Трохимчуку (см. [8, с. 101]) мы будем называть данную функцию *функцией Бора*. В литературе для нее также встречается название "стандартная складка" ("standard folding", см. [9, p. 70]).

**2.** Пусть $\delta(t)$ — непрерывная при $t \neq 0$ функция, причем $\delta(t) > 0$ при $t \neq 0$ и интегралы

$$\int^{-0} \delta(\tau) d\tau, \quad \int_{+0} \delta(\tau) d\tau$$

сходятся. Тогда определена строго монотонно возрастающая функция

$$f_\delta(t) = \int_0^t \delta(\tau) d\tau$$

и можно определить отображение вида

$$F_\delta(z) = f_\delta(x_1) + i x_2,$$

которые мы будем называть $\delta$-деформацией.

## 1.3 Теоремы об $(A, B)$-складке

**1.** Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область, разделенная жордановой дугой $\Gamma$ на две подобласти $D_1$ и $D_2$, и пусть $|A(z)| < |B(z)|$ почти всюду в $D_1$ и $|A(z)| > |B(z)|$ почти всюду в $D_2$.

**Определение 6.** *Решение* 1-*го вида* $f(z)$ *с особенностью* $\Gamma$ *уравнения* (1) (*соответственно уравнения* (2)), *гомеоморфное на множествах* $\Gamma$, $D_s$ $(s = 1, 2)$, *будем называть* $\mu$-складкой (*соответственно* $(A, B)$-складкой). *Дуга* $\Gamma$ *называется в этом случае* линией складки.

Напомним [3, с. 15], что дуга $\Gamma \subset \mathbb{C}$, заданная в виде

$$z = f(t) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{C}, \quad f'(t) \neq 0,$$

где $f(t)$ — аналитическая по вещественному переменному $t$ функция, называется *аналитической.*

Кроме того, напомним [4, с. 108], что дуга $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется дугой Ляпунова, если она в каждой точке имеет касательную, а угол наклона $\theta$ между касательной и осью абсцисс есть функция удовлетворяющая условию Гельдера относительно натурального параметра $s$

$$|\theta(s'') - \theta(s')| \leq C|s'' - s'|^{\alpha} \quad (0 < \alpha \leq 1),$$

где $C$, $\alpha$ — постоянные.

**Теорема 3**. *Предположим, что существуют* $(A, B)$*-складка* $f(z)$ *и* $g_0(z)$ *— гомеоморфное в* $D$ *решение* 2*-го вида с особенностью* $\Gamma$ *уравнения* (2). *Тогда если выполняются следующие условия* (a) *и* (b)

(a) *или* $\quad f^{-1} \in W^{1,2}_{\text{loc}}(f(D_1)), \quad$ *или* $\quad g_0^{-1} \in W^{1,2}_{\text{loc}}(g_0(D_1))$,
(b) *или* $\quad f^{-1} \in W^{1,2}_{\text{loc}}(f(D_2)), \quad$ *или* $\quad g_0^{-1} \in W^{1,2}_{\text{loc}}(g_0(D_2))$,

*то справедливы утверждения:*

$(i)$ *функция* $f(z)$ *представима в виде*

$$f(z) = \varphi(\mathcal{B}(\psi(g_0(z)))),$$

*где* $\varphi, \psi$ *— некоторые конформные отображения, а* $\mathcal{B}$ *— функция Бора;*

$(ii)$ $g_0(\Gamma)$ *— аналитическая дуга;*

$(iii)$ *если функция* $P_{(A,B)}(z)$ *является* $W^{1,2}_{\text{loc}}$*-мажорируемой в* $D$*, а* $f(\Gamma)$ *— дуга Ляпунова, то* $f(z)$, $g_0(z) \in W^{1,2}_{\text{loc}}(D)$*, а* $g_0^{-1} \in W^{1,2}_{\text{loc}}(g_0(D))$.

**Замечание 2.** В ходе доказательства этой теоремы устанавливается, что при выполнении ее условий и $W^{1,2}_{\text{loc}}$-мажорируемости функции $P_{(A,B)}(z)$ в $D$ существует $(A, B)$-складка $f_1(z)$ класса $W^{1,2}_{\text{loc}}(D)$, даже если исходная складка $f(z)$ является складкой с особенностью. Таковой является, например, $f_1(z) = \mathcal{B}(\psi(g_0(z)))$.

**2.** Пусть $D$, $D_1$, $D_2$, $\Gamma$ и уравнение (2) — те же, что и в предыдущем пункте. Имеет место следующая локальная версия утверждения, обратного к утверждению $(ii)$ предыдущей теоремы.

**Теорема 4**. *Пусть функция* $P_{(A,B)}(z)$ *является* $W^{1,2}_{\text{loc}}$*-мажорируемой в* $D$ *и* $g_0(z) \in W^{1,2}_{\text{loc}}(D)$ *— гомеоморфное в* $D$ *решение* 2*-го вида уравнения* (2).

*Предположим, что дуга* $g_0(\Gamma) \subset g_0(D)$ *является аналитической. Тогда в некоторой окрестности* $O(\Gamma')$ *произвольной дуги* $\Gamma' \Subset \Gamma$ *существует* $(A, B)$*-складка* $f(z) \in W^{1,2}(O(\Gamma'))$.

**Замечание 3.** Указанное в теореме решение $g_0(z)$ существует в силу теоремы 2.

В связи с последней теоремой следует отметить, что существование локальных складок в окрестности $\Gamma$, вообще говоря, не означает их глобального существования (см. [11, с. 230, 231]) всюду в $D$.

## 1.4 Теорема о сравнении вырождающихся отображений

**1.** Пусть $D\subset\mathbb{R}^2$ — односвязная область и $v=i(z)$ — фиксированный гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию.

Определим в $D$ функцию

$$\mathrm{K}_i(z)=\varlimsup_{r\to 0}\frac{\max\limits_{|z'-z|=r}|i(z')-i(z)|}{\min\limits_{|z'-z|=r}|i(z')-i(z)|}.$$

Известно [12, с. 23—24], что если $\mathrm{K}_i(z)\le Q$ ($Q\ge 1$ — константа), то отображение $i(z)$ $Q$-квазиконформно в области $D$. В этом случае отображение $i(z)$ дифференцируемо почти всюду в $D$ и, значит, имеет почти всюду в $D$ первую характеристику Лаврентьева $p(z)$ и комплексную характеристику $\mu_0(z)$. Нетрудно также показать, что в точках дифференцирумости отображения $i(z)$ верно равенство $\mathrm{K}_i(z)=p(z)$.

Пусть выполняются следующие условия:

1) множество вырождения отображения $i(z)$

$$\Gamma=\{z: z\in D,\ \operatorname*{ess\,sup}_{z'\in B_r(z)\cap D}\mathrm{K}_i(z')=+\infty\ \text{ для всякого круга }\ B_r(z)\},$$

имеет меру $\mathrm{mes}_2\Gamma=0$;

2) для отображения $i(z)$ выполняется $N$-свойство [7, с. 211], то есть всякое множество $E\subset D$ меры 0 переходит в множество $i(E)\subset i(D)$ меры 0.

Заметим также, что множество $\Gamma$ замкнуто относительно $D$, а отображение $i(z)$ локально квазиконформно в $D\setminus\Gamma$.

Таким образом отображение $i(z)$ дифференцируемо почти всюду в $D\setminus\Gamma$, а следовательно и в $D$. При этом у него почти всюду определена комплексная характеристика $\mu_0(z)$ и первая характеристика Лаврентьева $p(z)=P_{\mu_0}(z)=\mathrm{K}_i(z)$. Из сказанного заключаем, что $i(z)$ есть решение с особенностью $\Gamma$ уравнения Бельтрами вида (1) с $\mu=\mu_0(z)$.

Примером отображения $i(z)$, удовлетворяющего перечисленным выше условиям, является $i(z)=F_\delta(z)$ при подходящем $\delta=\delta(t)$.

По данному отображению $i(z)$ определим класс функций $i^*W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, как множество функций вида $f(z)=\varphi(i(z))$, где $\varphi\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(i(D))$.

Заметим, что в случае $\Gamma=\emptyset$ отображение $i(z)$ локально квазиконформно. Следовательно $i(z)\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$ и, в силу инвариантности классов $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$ при квазиконформных отображениях (см., например, [7, теорема 4.2, с. 239]), имеем $i^*W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)=W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$. Отсюда ясно, что при $\Gamma\ne\emptyset$, если $f(z)\in i^*W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, то $f(z)\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D\setminus\Gamma)$.

**2.** Основное наше утверждение следующее.

**Теорема 5**. *Пусть $D\subset\mathbb{C}$ — односвязная область, $v=i(z): D\to i(D)\subset\mathbb{C}$ — гомеоморфное отображение со свойствами* 1), 2) *указанными выше и комплескной характеристикой $\mu_0(z)$.*

*Пусть $\mu(z): D\to\mathbb{C}$ — измеримая, почти всюду конечная функция. Предположим, что для всякой подобласти $D'\Subset D$ можно указать функцию $K(z)\in W^{1,2}(D')$ такую, что*

$$\iint\limits_{D'}P_{\mu_0}(z)|\nabla K(z)|^2dx_1dx_2\ <\ +\infty, \tag{4}$$

$$\frac{|\mu(z)-\mu_0(z)|^2}{|(1-|\mu(z)|)(1-|\mu_0(z)|)|}\ \le\ K(z)\ \ \text{почти всюду в } D', \tag{5}$$

*причем функция $K(i^{-1}(v))$ абсолютно непрерывна внутри почти всех сечений области $i(D')$ прямыми параллельными осям координат.*

*Тогда существует гомеоморфизм $w = f(z) : D \to f(D) \subset \mathbb{C}$ для которого справедливы утверждения:*

*$(i)$ $f(z)$ суть решение 2-го вида с особенностью $\Gamma$ уравнения (1);*

*$(ii)$ $f(z) \in i^*W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, $f^{-1}(w) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D \setminus \Gamma))$ и в представлении*

$$f(z) = \varphi(i(z))$$

*отображение $\varphi$ имеет $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-мажорируемую первую характеристику.*

*Гомеоморфизм $w = f(z)$ единственный с точностью до конформного отображения в $w$-плоскости.*

**Замечание 4.** Если в теореме требовать лишь (локальную) ограниченность левой части неравенства (5), и не требовать выполнения условий (4), то получим (локально) квазиконформное отображение $\varphi(v)$.

Данная теорема позволяет сравнивать между собой отображения с неограниченными характеристиками Лаврентьева, вообще говоря, не $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-мажорируемыми.

Эту же теорему можно установить для уравнений Бельтрами заданных в виде (2). Приведем соответствующую формулировку.

**Теорема 6**. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, $v = i(z) : D \to i(D) \subset \mathbb{C}$ — гомеоморфное отображение со свойствами 1), 2) указанными выше и комплескной характеристикой $\mu_0(z)$.*

*Пусть $A(z), B(z) : D \to \mathbb{C}$ — измеримые почти всюду конечные функции, для которых выполнено условие (3). Предположим, что для всякой подобласти $D' \Subset D$ можно указать функцию $K(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D')$ такую, что*

$$\begin{aligned} \iint\limits_{D'} P_{\mu_0}(z)|\nabla K(z)|^2 dx_1 dx_2 &< +\infty, \\ \frac{|A(z) + B(z)\mu_0(z)|^2}{|(|A(z)| - |B(z)|)(1 - |\mu_0(z)|)|} &\leq K(z) \quad \text{почти всюду в } D', \end{aligned}$$

*причем функция $K(i^{-1}(v))$ абсолютно непрерывна внутри почти всех сечений области $i(D')$ прямыми параллельными осям координат.*

*Тогда существует гомеоморфизм $w = f(z) : D \to f(D) \subset \mathbb{C}$ для которого справедливы утверждения:*

*$(i)$ $f(z)$ суть решение 2-го вида с особенностью $\Gamma$ уравнения (2);*

*$(ii)$ $f(z) \in i^*W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, $f^{-1}(w) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D \setminus \Gamma))$ и в представлении*

$$f(z) = \varphi(i(z))$$

*отображение $\varphi$ имеет $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-мажорируемую первую характеристику.*

*Гомеоморфизм $w = f(z)$ единственный с точностью до конформного отображения в $w$-плоскости.*

**Замечание 5.** Для классического случая уравнения Бельтрами не меняющего тип, договоримся считать, что понятия 1-го и 2-го видов решений совпадают. Тогда в приведенных формулировках теоремы 5, 6 будут верны и для классического случая.

**Замечание 6.** Заметим, что данные теоремы можно интерпретировать как теоремы существования и единственности для отображений с характеристикой $p(z)$ не являющейся $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-мажорируемой.

Установленные теоремы сравнения с фиксированным гомеоморфизмом играют ключевую роль при доказательстве результатов следующего параграфа.

## 1.5 Системы Бельтрами с вырождением на кривой

**1.** Как по заданной функции $\mu(z)$ (или паре $A(z)$, $B(z)$) указать отображение $i(z)$ с указанными в предыдущих теоремах свойствами?

Остановимся подробнее на случае уравнения Бельтрами переменного типа заданного в виде (1).

Пусть существует жорданова дуга $\Gamma \subset D$, делящая $D$ на две односвязные подобласти $D_1$ и $D_2$ так, что $|\mu(z)| < 1$ почти всюду в $D_1$ и $|\mu(z)| > 1$ почти всюду в $D_2$. Будем предполагать, что на $\Gamma$ уравнение вырождается[3], то есть для всякого $r > 0$ и всякого $z \in \Gamma$ выполнено

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_r(z)\cap D} P_\mu(z) = +\infty.$$

Пусть выполняются следующие условия.

**(A)** Справедливо представление

$$|\mu(z)| = 1 + M(z)\delta(H(z)),$$

где $M(z)$ — измеримая почти всюду конечная в $D$ функция, такая, что $M(z) < 0$ почти всюду в $D_1$ и $M(z) > 0$ почти всюду в $D_2$, $\delta(t)$ — непрерывная функция, такая, что $\delta(t) > 0$ при $t \neq 0$ и $\delta(0) = 0$, а $H(z) \in C(D) \cap W^{1,2}_{\text{loc}}(D)$, причем $\nabla H(z) \neq 0$ почти всюду в $D$ и $H(z) < 0$ в $D_1$, $H(z) > 0$ в $D_2$.

**(B)** Существует функция $Z(z) \in C(D) \cap W^{1,2}_{\text{loc}}(D)$ такая, что отображение

$$j(z) = H(z) + iZ(z) \in C(D) \cap W^{1,2}_{\text{loc}}(D)$$

является локально квазиконформным гомеоморфизмом $D$ на $j(D)$.

Очевидно, из условия **(A)** следует, что $H(z) = 0$ — уравнение кривой $\Gamma$.

Договоримся далее для произвольной (вещественной) функции $f(z)$, имеющей градиент в точке $z \in D$, наравне использовать обозначения

$$\nabla f(z) = (f_{x_1}, f_{x_2}) \quad \text{и} \quad \nabla f(z) = f_{x_1} + if_{x_2}.$$

В последнем случае имеет смысл запись $\overline{\nabla f(z)}$, подразумевающая

$$\overline{\nabla f(z)} = f_{x_1} - if_{x_2}.$$

**2.** Нами установлено, что при возможности определенного выбора пары функций $H(z)$, $Z(z)$ в $D$ существует гомеоморфное решение 2-го вида с особенностью $\Gamma$ уравнения Бельтрами (1). Описывается структура этих решений, а также, в случае существования, и $\mu$-складок с линией складки $\Gamma$.

**Теорема 7**. *Предположим, что выполняются условия* **(A)**, **(B)** *и для всякой подобласти $D' \Subset D$ можно указать функцию $K(z) \in W^{1,2}(D')$ такую, что*

$$\iint_{D'} \frac{|\nabla K(z)|^2}{\delta(H)} dx_1 dx_2 < +\infty$$

[3]Это, вообще говоря, не означает, что $\Gamma$ совпадает со множеством *всех* точек в которых уравнение вырождается.

*причем для почти всех* $z \in D'$

$$\frac{1}{|M(z)|\delta^2(H)}\left|\mu(z) - \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}}\right|^2 + \frac{1}{|M(z)|} \le K(z).$$

*Положим* $i(z) = F_\delta(j(z))$. *Тогда существует гомеоморфизм* $w = f(z) : D \to f(D) \subset \mathbb{C}$ *для которого справедливы утверждения:*

$(i)$ $f(z)$ *суть решение* 2-го *вида с особенностью* $\Gamma$ *уравнения* (1);

$(ii)$ $f(z) \in i^* W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, $f^{-1}(w) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D \setminus \Gamma))$ *и в представлении*

$$f(z) = \varphi(i(z)) = \varphi(F_\delta(j(z)))$$

*отображение* $\varphi$ *имеет* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$*-мажорируемую первую характеристику.*

*Гомеоморфизм* $w = f(z)$ *единственный с точностью до конформного отображения в* $w$*-плоскости.*

**Следствие 1**. *Пусть выполняются условия теоремы* 7 *и в* $D$ *определена* $\mu$*-складка* $f(z)$. *Тогда функция* $f(z)$ *представима в виде*

$$f(z) = \varphi(\mathcal{B}(\psi(i(z)))) = \varphi(\mathcal{B}(\psi(F_\delta(j(z))))),$$

*где* $\varphi$ *— некоторое конформное отображение,* $\mathcal{B}$ *— функция Бора,* $\psi$ *— некоторое отображение с* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$*-мажорируемой первой характеристикой.*

Еще одним результатом полученным нами является теорема.

**Теорема 8**. *Предположим, что сходятся интегралы*

$$\int^{-0} \frac{d\tau}{\delta(\tau)}, \quad \int_{+0} \frac{d\tau}{\delta(\tau)},$$

*выполняются условия* **(A)**, **(B)** *и для всякой подобласти* $D' \Subset D$ *можно указать функцию* $K(z) \in W^{1,2}(D')$ *такую, что*

$$\iint\limits_{D'} \frac{|\nabla K(z)|^2}{\delta(H)} dx_1 dx_2 < +\infty,$$

*причем для почти всех* $z \in D'$

$$\frac{1}{|M(z)|\delta^2(H)}\left|\mu(z) - \frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}}\right|^2 + \frac{1}{|M(z)|} \le K(z).$$

*Положим* $i(z) = F_{\frac{1}{\delta}}(j(z))$. *Тогда существует гомеоморфизм* $w = f(z) : D \to f(D) \subset \mathbb{C}$ *для которого справедливы утверждения:*

$(i)$ $f(z)$ *суть решение* 2-го *вида с особенностью* $\Gamma$ *уравнения* (1);

$(ii)$ $f(z) \in i^* W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, $f^{-1}(w) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(D \setminus \Gamma))$ *и в представлении*

$$f(z) = \varphi(i(z)) = \varphi(F_{\frac{1}{\delta}}(j(z)))$$

*отображение* $\varphi$ *имеет* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$*-мажорируемую первую характеристику.*

*Гомеоморфизм* $w = f(z)$ *единственный с точностью до конформного отображения в* $w$*-плоскости.*

**Следствие 2**. *Пусть выполняются условия теоремы* 8 *и в* $D$ *определена* $\mu$*-складка* $f(z)$. *Тогда функция* $f(z)$ *представима в виде*

$$f(z) = \varphi(\mathcal{B}(\psi(i(z)))) = \varphi(\mathcal{B}(\psi(F_{\frac{1}{\delta}}(j(z))))),$$

*где* $\varphi$ *— некоторое конформное отображение,* $\mathcal{B}$ *— функция Бора,* $\psi$ *— некоторое отображение с* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$*-мажорируемой первой характеристикой.*

**3.** Рассмотрим еще один случай уравнения Бельтрами переменного типа вырождающегося на кривой.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, $\Gamma \subset D$ — кривая класса $C^3$, делящая область $D$ на односвязные подобласти $D_1$, $D_2$, и в $D$ задано уравнение Бельтрами переменного типа вида (1). Пусть $|\mu(z)| < 1$ почти всюду в $D_1$ и $|\mu(z)| > 1$ почти всюду в $D_2$.

Следующая теорема является специальным случаем результата Сребро и Якубова [10, теорема 1.1] для уравнения переменного типа.

**Теорема 9**. *Предположим, что функция* $\mu(z)$ *представима в виде*

$$\mu(z) = (1 + \tilde{M}(z)\rho(\mathrm{dist}(z, \Gamma)))\, \mathrm{e}^{2i\theta(z)},$$

*где:* 1) *функция* $\rho(t)$ *непрерывна на* $[0, +\infty)$, *причем* $\rho(0) = 0$ *и* $\rho(t) > 0$ *при* $t \neq 0$; 2) *функция* $\theta(z) \in C^1(D)$ *такова, что всюду на* $\Gamma$

$$dz + \mathrm{e}^{2i\theta(z)}\,\overline{dz} \neq 0,$$

*при* $dz$ *направленном по касательной к* $\Gamma$; 3) *комплекснозначная функция* $\tilde{M}(z)$ *измерима и почти всюду в* $D$

$$\frac{1}{R} \le |\mathrm{Re}\, \tilde{M}(z)| \le R, \quad |\mathrm{Im}\, \tilde{M}(z)| \le R \quad (R \equiv \mathrm{const}\ ).$$

*Тогда в некоторой окрестности* $\Gamma$ *существует решение* 2*-го вида с особенностью* $\Gamma$ *уравнения* (1).

Автор выражает глубокую благодарность В.М. Миклюкову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

*Работа поддержана грантом ФМИТ ВолГУ*

# Список литературы

[1] И.Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М: Наука, 1988.

[2] В.М. Миклюков, Изотермические координаты на поверхностях с особенностями // Матем. сб., 2004, 195:1, 69—88.

[3] Г.М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

[4] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, ГИФМЛ, Москва, 1958.

[5] O. Martio, V.M. Miklyukov, On existence and uniqueness of degenerate Beltrami equations. Complex Variables. v. 49. 2004. p. 647-656.

[6] В.М. Миклюков, Г.Д. Суворов, О существовании и единственности квазиконформных отображений с неограниченными характеристиками, Исслед. по соврем. теории функций и ее применениям, Изд-во "Наукова думка", Киев, 1972, С. 45—53.

[7] В.М. Гольдштейн, Ю.Г. Решетняк, Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М. Наука, 1983.

[8] Ю.Ю. Трохимчук, Непрерывные отображения и условия моногенности, ГИФМЛ, Москва, 1963.

[9] U. Srebro, E. Yakubov, Branched folded maps and alternating Beltrami equations // Journal d'analyse mathematique, Vol. 70(1996), P. 65—90.

[10] U. Srebro, E. Yakubov, $\mu$-Homeomorphisms, Contemporary Mathematics AMS, Vol.211 , 1997, P. 473-479.

[11] U. Srebro, E. Yakubov, Uniformization of maps with folds // Israel mathematical conference proceedings, Vol. 11, 1997, P. 229-232.

[12] П.П. Белинский, Общие свойства квазиконформных отображений, Новосибирск, Наука, СО 1974.

A.N. Kondrashov, **The Beltrami Equation of Alternating Type**

**Abstract.** We investigate the Beltrami equation of alternating type. In the paper we entered two kinds of solutions of such equations between which interrelations are investigated. Questions of existence and uniqueness of the given solutions are investigated.