УДК 517.95,517.75,517.54

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА НУЛЕВОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

А.Н. Кондрашов

Работа посвящена исследованию систем уравнений типа поверхностей нулевой средней кривизны в псевдоевклидовых пространствах. Для них установлена версия хорошо известной теоремы С.Н. Бернштейна, теоремы типа Лиувилля и Фрагмена—Линделефа.

1. Введение. Вспомогательные факты

1.1. Пусть в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{3N+2}$, пространства переменных $(x, \mathrm{y}, \xi, \zeta) = (x_1, x_2, y_1, \ldots, y_N, \xi_1, \ldots, \xi_N, \zeta_1, \ldots, \zeta_N)$, заданы вещественные функции

$$A_{ij}(x, \mathrm{y}, \xi, \zeta) \in C^1(\mathcal{D}), \ \ (i, j = 1, 2, \ \ A_{ij} = A_{ji}),$$

удовлетворяющие соотношению:

$$A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = 1. \tag{1}$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$\mathcal{A}(x, \mathrm{y}, \xi, \zeta)(\omega_1, \omega_2) = A_{22}\omega_1^2 - 2A_{12}\omega_1\omega_2 + A_{11}\omega_2^2.$$

В силу (1), форма $\mathcal{A}(x, \mathrm{y}, \xi, \zeta)(\omega_1, \omega_2)$ определена либо положительно, либо отрицательно при всех $(x, \mathrm{y}, \xi, \zeta) \in \mathcal{D}$. Мы будем для определенности предполагать, что всюду далее форма $\mathcal{A}(x, \mathrm{y}, \xi, \zeta)(\omega_1, \omega_2)$ положительно определена при $(x, \mathrm{y}, \xi, \zeta) \in \mathcal{D}$. В соответствии с этим, будем говорить, что дифференцируемая вектор-функция

$$\mathrm{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_N(x)) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^N \tag{2}$$

порождает $\mathcal{A}$-метрику:

$$ds_{\mathrm{f}}^2 = \mathcal{A}(x, \mathrm{f}, \mathrm{f}_{x_1}, \mathrm{f}_{x_2})(dx_1, dx_2).$$

Объектом изучения данной работы являются системы дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{d}{dx_i}\left(A_{ij}(x, \mathrm{f}, \mathrm{f}_{x_1}, \mathrm{f}_{x_2})\mathrm{f}_{x_j}\right) = 0, \tag{3}$$

$\mathrm{f} = \mathrm{f}(x) \in C^2$, удовлетворяющие структурному условию 1.

В настоящей работе установлены некоторые геометрические свойства поверхностей $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^N$, заданных погружениями вида (2), где $\mathrm{f}(x)$ — C^2-решение системы (3). Такие поверхности будем называть далее *"$\mathcal{A}$-поверхностями"*.

Свойства "$\mathcal{A}$-поверхностей" подобны свойствам поверхностей нулевой средней кривизны (НСК-поверхностям) в псевдоевклидовых пространствах [7, 8], которые в свою очередь описываются некоторыми частными случаями систем вида (3) (см. приводимый ниже пример 1). В соответствии с этим системы уравнений (3) со структурными условиями (1) мы называем *"системами уравнений типа НСК"*.

Пример 1. Важным частным случаем системы вида (3), удовлетворяющей структурному условию (1), является система с

$$A_{11} = \frac{\zeta^2}{\sqrt{\xi^2\zeta^2 - \langle\xi,\zeta\rangle^2}}, \quad A_{12} = \frac{-\langle\xi,\zeta\rangle}{\sqrt{\xi^2\zeta^2 - \langle\xi,\zeta\rangle^2}}, \quad A_{22} = \frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2\zeta^2 - \langle\xi,\zeta\rangle^2}},$$

где $\xi^2, \zeta^2, \langle\xi,\zeta\rangle$ берутся в смысле псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}_k^N$, $0 \le k \le N$, ассоциированного с $\mathbb{R}^N$ (см., например, [3]). В дальнейшем говоря о псевдоевклидовых пространствах мы пользуемся терминологией и обозначениями работ [6, 7].

Такие системы описывают двумерные НСК-поверхности в $\mathbb{E}_k^N$ с положительно или отрицательно определенной метрикой. Здесь область $\mathcal{D} = \{(x, \mathrm{y}, \xi, \zeta) \in \mathbb{R}^{3N+2} : \zeta^2 > 0,\ \xi^2\zeta^2 - \langle\xi,\zeta\rangle^2 > 0\}$ соответствует поверхностям с положительно определенной первой квадратичной формой, а область $\mathcal{D} = \{(x, \mathrm{y}, \xi, \zeta) \in \mathbb{R}^{3N+2} : \zeta^2 < 0,\ \xi^2\zeta^2 - \langle\xi,\zeta\rangle^2 > 0\}$ — поверхностям с отрицательно определенной первой квадратичной формой.■

Отметим, что двумерные НСК-поверхности в псевдоевклидовом пространстве ранее изучались в работах [6, 7, 16].

Отметим также, что результаты настоящей работы были ранее частично анонсированы в [9, 10].

1.2. Для дальнейших целей нам потребуются некоторые известные факты, приводимые в этом пункте.

Определение 1. *Всякая пара вида $\mathcal{F} = (\Omega, ds^2)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область, а*

$$ds^2 = g_{11}(x)dx_1^2 + 2g_{12}(x)dx_1dx_2 + g_{22}(x)dx_2^2, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{4}$$

риманова метрика в Ω, называется абстрактной поверхностью.

Известно (см., например, [2, гл. 2]), что любая двумерная риманова метрика локально приводится к виду

$$ds^2 = \lambda(v_1, v_2)(dv_1^2 + dv_2^2), \tag{5}$$

где $\lambda(v_1, v_2) > 0$.

Определение 2. *Локальные координаты v_1, v_2, в которых метрика имеет вид (5), называются изотермическими.*

Определение 3. *Пусть $D \subset \Omega$ — произвольная подобласть области Ω, и $P, Q \subset D$ — непустые, замкнутые относительно D, непересекающиеся множества. Тройка множеств $(P, Q; D)$ такого вида называется конденсатором.*

Договоримся называть любую функцию $\varphi(x) : D \to \mathbb{R}$, класса Lip D, обращающуюся в 1 на P и в 0 на Q, удовлетворяющую неравенству $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ всюду в D, *допустимой* для конденсатора $(P, Q; D)$.

Для произвольного конденсатора $(P, Q; D)$ можно определить следующую числовую характеристику

$$\text{cap}\,(P, Q; D) = \inf_{\varphi} \int\limits_{D} |\nabla \varphi|^2 d\sigma,$$

где $|\nabla \varphi|$ — модуль градиента в метрике поверхности $\mathcal{F}$, $d\sigma$ — элемент площади в этой метрике, а точная нижняя грань берется по всевозможным функциям допустимым для конденсатора $(P, Q; D)$. Число cap $(P, Q; D)$ называется *емкостью* конденсатора.

Емкость обладает свойством монотонности: если $(P_1, Q_1; D)$ еще один конденсатор такой, что $P_1 \subset P$, $Q_1 \subset Q$, то

$$\text{cap}\,(P_1, Q_1; D) \leq \text{cap}\,(P, Q; D). \tag{6}$$

Определение 4. *Пусть $\{D_m\}_{m=1}^{+\infty}$ — последовательность ограниченных областей в $\mathbb{R}^2$, со свойствами: $\overline{D}_m \subset D_{m+1}$, $\bigcup\limits_{m=1}^{+\infty} D_m = \mathbb{R}^2$. Будем называть такую последовательность областей исчерпанием $\mathbb{R}^2$.*

Определение 5. *Пусть $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$ — компактное множество. Область Ω, являющаяся неограниченной компонентой связности $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{K}$, называется внешностью компакта $\mathcal{K}$.*

Определение 6. *Говорят, что абстрактная поверхность $\mathcal{F} = (\Omega, ds^2)$, заданная над внешностью компакта $\mathcal{K}$, имеет параболический конформный тип в бесконечно удаленной точке, если для некоторого исчерпания $\{D_m\}_{m=1}^{+\infty}$, и некоторого фиксированного n, такого, что $\mathcal{K} \subset D_n$, имеет место равенство*

$$\lim_{m \to +\infty} \text{cap}\,(\overline{D}_n, \mathbb{R}^2 \setminus D_m; \mathbb{R}^2) = 0. \tag{7}$$

В противном случае, говорят, что поверхность имеет гиперболический конформный тип в бесконечно удаленной точке.

Следует отметить (см. [12, Лемма 2.1]), что справедливость равенства (7) хотя бы для одного исчерпания $\{D_n\}_{n=1}^{+\infty}$, влечет за собой его справедливость и для любого другого исчерпания $\{D'_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Будем обозначать через

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{g_{22} f_{x_1} - g_{12} f_{x_2}}{\sqrt{g}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{-g_{12} f_{x_1} + g_{11} f_{x_2}}{\sqrt{g}} \right) \right], \\ g &= g_{11} g_{22} - g_{12}^2 > 0,\ f \in C^2(\Omega), \end{aligned} \tag{8}$$

— оператор Лапласа—Бельтрами (лапласиан) в метрике (4).

Замечание. Из равенств (1) и (8) следует, что (3) суть условие покоординатной гармоничности вектор-функции $\mathrm{y} = \mathrm{f}(x)$ в $\mathcal{A}$-метрике ds_{f}^2.

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение (см. [4]).

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{F} = (\Omega, ds^2)$ *— абстрактная поверхность, заданная над* Ω *— внешностью компакта* $\mathcal{K}$ *в пространстве* $\mathbb{R}^2$ *переменных* x_1, x_2*. Если координатные функции* x_1, x_2 *гармоничны в метрике поверхности* $\mathcal{F}$*:*

$$\Delta x_1 = 0, \ \Delta x_2 = 0, \tag{9}$$

то $\mathcal{F}$ *имеет параболический конформный тип в бесконечно удаленной точке.*

Замечание. Хорошо известно, что емкость конденсатора является конформным инвариантом, а любая абстрактная поверхность, заданная над внешностью компакта с евклидовой метрикой, имеет параболический конформный тип в бесконечно удаленной точке. Отсюда можно заключить, что абстрактная поверхность $\mathcal{F} = (\Omega, ds^2)$, заданная над внешностью компакта $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$, имеет параболический конформный тип в бесконечно удаленной точке, если для некоторой ограниченной односвязной области $D \supset\supset \mathcal{K}$ существует взамнооднозначное конформное отображение поверхности $\tilde{\mathcal{F}} = (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, ds^2)$ на область вида $\{v : |v| > R, \ R > 0\} \subset \mathbb{C}_v$, переводящее бесконечную точку плоскости $\mathbb{R}^2$ в бесконечную точку плоскости $\mathbb{C}_v$. Доказательство данной теоремы основано на явном построение конформного отображения с указанными свойствами.

В случае когда поверхность $\mathcal{F} = (\Omega, ds^2)$ целая, т.е. $\Omega = \mathbb{R}^2$, результат теоремы 1 можно уточнить (см. [4]).

Теорема 2. *Если для целой абстрактной поверхности* $\mathcal{F} = (\mathbb{R}^2, ds^2)$ *выполнены условия* (9)*, то на ней можно ввести изотермические координаты* u_1, u_2 *с помощью линейного преобразования вида*

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1, \\ x_2 &= au_1 + bu_2, \quad b > 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Нам также понадобится следующее вспомогательное утверждение (см., например, [13]).

Лемма 1. *Пусть* $(\mathcal{H}, h)$ *— риманово многообразие. Предположим, что на* $\mathcal{H}$ *задана гармоническая в метрике* h *функция* $u(x)$*, такая, что при любых* $t, t_1, t_2 \in (a, b)$ $(t_1 < t_2)$ *множества*

$$\begin{aligned} \Sigma_t(u) &= \{x : \ u(x) = t\}, \\ M_{t_1,t_2} &= \{x : \ t_1 \le u(x) \le t_2\}, \end{aligned}$$

компактны в M*.*

Пусть $v(x)$ *другая гармоническая в метрике* h *функция. Тогда функция* $\overline{v}(t) = \max\limits_{x \in \Sigma_t(x)} v(x)$ *выпукла вниз на* (a, b)*.*

2. $\mathcal{A}$-графики

2.1. Целью изучения этого параграфа являются $\mathcal{A}$-графики, т.е. $\mathcal{A}$-поверхности, которые могут быть заданы в виде:

$$y_3 = F_3(y_1, y_2), y_4 = F_3(y_1, y_2), \ldots, y_N = F_N(y_1, y_2), \tag{11}$$

где $(y_1, y_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2_{(y_1,y_2)}$. Мы говорим в этом случае, что $\mathcal{A}$-график (11) задан над областью Ω. При этом ясно, что

$$f_3(x) = F_3(f_1(x), f_2(x)), f_4(x) = F_3(f_1(x), f_2(x)), \dots,$$

$$f_N(x) = F_N(f_1(x), f_2(x)) \ \forall\, x \in D.$$

Замечание. Здесь и далее пространство $\mathbb{R}^2_{(y_1,y_2)}$ переменных (y_1, y_2) отождествляется с плоскостью $y_3 = 0, y_4 = 0, \dots, y_N = 0$. Аналогичный смысл имеют обозначения типа $\mathbb{R}^2_{(y_1,y_i)}$, $\mathbb{R}^3_{(y_1,y_2,y_i)}$ и т.п.

Возможность представления $\mathcal{A}$-поверхности в виде (11) предполагает, что отображение

$$(y_1, y_2) = (f_1(x), f_2(x)) : D \to \Omega \tag{12}$$

суть гомеорфизм областей D и Ω. В дальнейшем, говоря об $\mathcal{A}$-графиках, мы везде дополнительно предполагаем, что в D

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0, \infty.$$

Договоримся называть $\mathcal{A}$-график (11) *целым*, если $\Omega = \mathbb{R}^2_{(y_1,y_2)}$.

Заметим, что если $(x, \mathrm{y}, \xi, \zeta) \in \mathcal{D}$ и $\xi_1\zeta_2 - \xi_2\zeta_1 \neq 0$, то двумерная плоскость $\Pi(\xi, \zeta) \subset \mathbb{R}^N$, с парой направляющих векторов ξ и ζ, взаимно однозначно проецируется на $\mathbb{R}^2_{(y_1,y_2)}$. При этом $\Pi(\xi, \zeta)$ задается вектор-функцией

$$\mathrm{y} = \frac{\zeta_2\xi - \xi_2\zeta}{\xi_1\zeta_2 - \xi_2\zeta_1} y_1 + \frac{-\zeta_1\xi + \xi_1\zeta}{\xi_1\zeta_2 - \xi_2\zeta_1} y_2. \tag{13}$$

Положим

$$\mu_i = \mu_i(\xi, \zeta) = \frac{\xi_i\zeta_2 - \zeta_i\xi_2}{\xi_1\zeta_2 - \xi_2\zeta_1},\ \eta_i = \eta_i(\xi, \zeta) = \frac{-\xi_i\zeta_1 + \zeta_i\xi_1}{\xi_1\zeta_2 - \xi_2\zeta_1},$$

для всех $i = 1, \dots, N$. Тогда (13) в координатной записи примет вид

$$y_i = \mu_i y_1 + \eta_i y_2, \quad i = 1, \dots, N. \tag{14}$$

Очевидно $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0, \eta_1 = 0, \eta_2 = 1$. Геометрический смысл величин μ_i, η_i $(i = 3, \dots, N)$ можно представить себе следующим образом. Пусть $\mathbb{R}^3_{(y_1,y_2,y_i)} \subset \mathbb{R}^N$ — трехмерное пространство переменных y_1, y_2, y_i, и $\Pi^i(\xi, \zeta)$ проекция $\Pi(\xi, \zeta)$ на $\mathbb{R}^3_{(y_1,y_2,y_i)}$. Пусть также ϕ_i (соответственно ψ_i) — угол между осью Oy_1 (соответственно Oy_2) и сечением плоскости $\mathbb{R}^2_{(y_1,y_i)}$ (соответственно $\mathbb{R}^2_{(y_2,y_i)}$) плоскостью $\Pi^i(\xi, \zeta)$, где $\mathbb{R}^2_{(y_1,y_i)}$ (соответственно $\mathbb{R}^2_{(y_2,y_i)}$) плоскость переменных y_1, y_i (соответственно y_2, y_i) (рис. 1). Тогда будут справедливы равенства

$$\mu_i = \operatorname{tg}\phi_i,\ \eta_i = \operatorname{tg}\psi_i.$$

Рассмотрим системы уравнений, у которых множество $\mathcal{D}$ удовлетворяет одному из следующих условий:

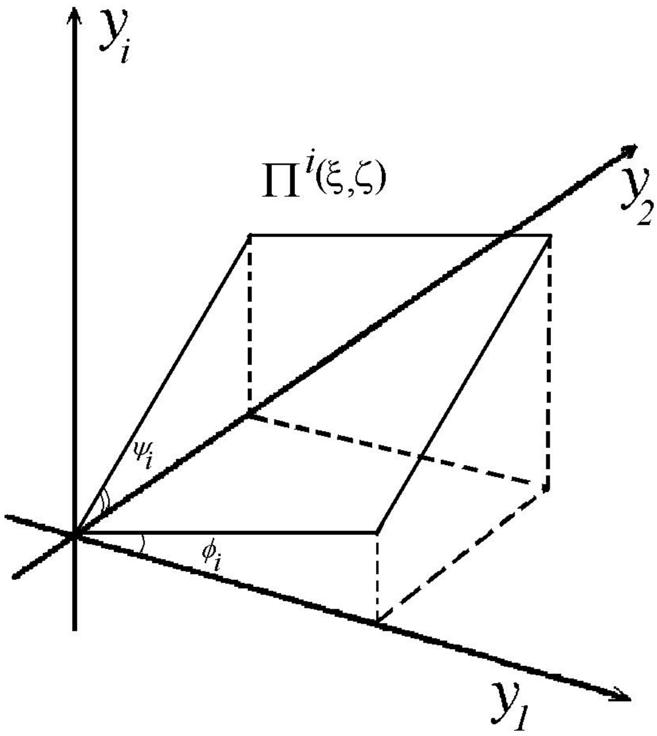

Рис. 1. Углы ϕ_i и ψ_i.

(a) *или при* $3 \le r < N \; \forall \; (x, \mathrm{y}, \xi, \zeta) \in \mathcal{D}$, $\forall \; i = 3, \dots, r$

$$|\mu_i| \le \Upsilon(\mu_{r+1}, \dots, \mu_N),$$

где $\Upsilon \ge 0$ *— некоторая функция, зависящая от* $N - r$ *аргументов;*

(a′) *или при* $r = N \; \forall (x, \mathrm{y}, \xi, \zeta) \in \mathcal{D}$, $\forall \; i = 3, \dots, r$

$$|\mu_i| \le C,$$

т.е. $\Upsilon \equiv C = const$*;*

(b) *или при* $3 \le r < N \; \forall (x, \mathrm{y}, \xi, \zeta) \in \mathcal{D}$, $\forall \; i = 3, \dots, r$

$$|\eta_i| \le \Upsilon(\eta_{r+1}, \dots, \eta_N),$$

где $\Upsilon \ge 0$ *— некоторая функция, зависящая от* $N - r$ *аргументов;*

(b′) *или при* $r = N \; \forall (x, \mathrm{y}, \xi, \zeta) \in \mathcal{D}$, $\forall \; i = 3, \dots, r$

$$|\eta_i| \le C,$$

т.е. $\Upsilon \equiv C = const$.

Условия (a), (a′), (b), (b′) характеризуют, таким образом, допустимую степень наклона касательной плоскости $T_{\mathfrak{f}(x)}\mathcal{M}$ к $\mathcal{A}$-графику $\mathcal{M}$ относительно выделенного направления (оси Oy_1 или Oy_2) в $\mathbb{R}^2_{(y_1,y_2)}$.

Пример 2. Покажем, что условия (a), (b) выполняются для системы примера 1, где область $\mathcal{D} = \{(x, \mathrm{y}, \xi, \zeta) \in \mathbb{R}^{3N+2} : \zeta^2 > 0,\ \xi^2\zeta^2 - \langle \xi, \zeta \rangle^2 > 0\}$ соответствует поверхностям с положительно определенной первой квадратичной формой.

Действительно, пусть базис в $\mathbb{E}^N_k$ занумерован стандартно, а метрика имеет вид

$$ds^2 = -\sum_{i=1}^{k} dy_i^2 + \sum_{i=k+1}^{N} dy_i^2. \tag{15}$$

Тогда справедливы равенства

$$\xi^2 = -\sum_{i=1}^{k} \xi_i^2 + \sum_{i=k+1}^{N} \xi_i^2, \ \ \zeta^2 = -\sum_{i=1}^{k} \zeta_i^2 + \sum_{i=k+1}^{N} \zeta_i^2,$$

$$\langle \xi, \zeta \rangle = -\sum_{i=1}^{k} \xi_i\zeta_i + \sum_{i=k+1}^{N} \xi_i\zeta_i.$$

В этом случае A_{ij} не зависят от x и y, а множество $\mathcal{D}$ полностью определяется неравенствами

$$\xi^2 > 0, \ \ \zeta^2 > 0, \ \ \xi^2\zeta^2 - \langle \xi, \zeta \rangle^2 > 0. \tag{16}$$

Неравенства (16) для некоторой пары векторов ξ, ζ означают, что их любая линейная комбинация $\alpha\xi + \beta\zeta$, при $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ имеет положительный псевдоевклидов скалярный квадрат, т.е. плоскость $\Pi(\xi, \zeta)$ пространственноподобна. Отсюда имеем

$$(\zeta_2\xi - \xi_2\zeta)^2 = -\sum_{i=1}^{k} (\zeta_2\xi_i - \xi_2\zeta_i)^2 + \sum_{i=k+1}^{N} (\zeta_2\xi_i - \xi_2\zeta_i)^2 > 0$$

и при $\xi_1\zeta_2 - \xi_2\zeta_1 \neq 0$, легко получаем

$$|\mu_i| < \left(\sum_{s=k+1}^{N} \mu_s^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \ i = 3, \ldots, k. \tag{17}$$

Аналогично доказываются неравенства

$$|\eta_i| < \left(\sum_{s=k+1}^{N} \eta_s^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \ i = 3, \ldots, k. \tag{18}$$

Таким образом, в случае метрики, приведенной к виду (15), $r = k$.■

Рассмотренный пример соответствует двумерным непараметрическим НСК-поверхностям, заданным над плоскостью с метрикой сигнатуры $(-1, -1)$. Аналогично рассматриваются случаи когда метрика в $\mathbb{E}^N_k$ приведена к одной из форм:

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 - \sum_{i=3}^{k+2} dy_i^2 + \sum_{i=k+3}^{N} dy_i^2, \tag{19}$$

$$ds^2 = -dy_1^2 + dy_2^2 - \sum_{i=3}^{k+1} dy_i^2 + \sum_{i=k+2}^{N} dy_i^2, \tag{20}$$

отвечающих НСК-поверхностям заданным над евклидовой плоскостью и плоскостью с метрикой сигнатуры (-1,1) (Минковского). В обеих ситуациях легко устанавливаются неравенства аналогичные (17) и (18). При этом для (19) $r = k+2$, а для (20) $r = k+1$. Кроме того, если взять пространство $\mathbb{E}^N_{N-2}$ с метрикой

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 - \sum_{i=3}^{N} dy_i^2,$$

то здесь будут выполняться условия (a′), (b′) при $C \equiv 1$.

2.2. Основным результатом данного параграфа является следующая версия теоремы С.Н. Бернштейна (см. [5]).

Пусть всюду далее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$.

Теорема 3. *Предположим, что множество $\mathcal{D}$ системы* (3) *удовлетворяет одному из условий* (*a*) *или* (*b*), *при некотором $r < N$. Тогда, если целый $\mathcal{A}$-график $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ содержится внутри многогранного угла вида*

$$\langle \mathrm{a}_i, y \rangle \geq \gamma_i,\ i = 1, \dots, N-r, \tag{21}$$

где $\gamma_i \equiv const$, а a_i — векторы ортогональные плоскости переменных $y_3, \dots, y_r$, проекции которых на плоскость переменных $y_{r+1}, \dots, y_N$ линейно независимы, то $\mathcal{M}$ двумерная плоскость.

Доказательство. Векторы a_i, удовлетворяющие условию теоремы, в координатной записи имеют вид

$$\mathrm{a}_i = (\alpha_i, \beta_i, 0, \dots, 0, a_{i1}, \dots, a_{i,N-r}),\ \ i = 1, \dots, N-r,$$

причем $\det\{a_{ij}\} \neq 0$. Используя это, перепишем неравенства (21) следующим образом

$$\sum_{j=1}^{N-r} a_{ij} y_{r+j} + \alpha_i y_1 + \beta_i y_2 \geq \gamma_i,\ \ i = 1, 2, \dots, N-r. \tag{22}$$

Так как $\mathcal{M}$ взаимно однозначно проецируется на плоскость $\mathbb{R}^2_{(y_1,y_2)}$, то по теореме 2 существует линейное преобразование

$$\begin{aligned} &y_1 = u_1, \\ &y_2 = a u_1 + b u_2, \quad b > 0, \end{aligned} \tag{23}$$

приводящее метрику ds^2_{I} к конформному виду.

Функции $\tilde{f}_i(u_1, u_2) \stackrel{\text{def}}{=} F_i(u_1, a u_1 + b u_2)$, где $i = 3, \dots, N$, являются целыми и гармоническими по переменным u_1, u_2. Их линейные комбинации

$$h_i(u_1, u_2) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N-r} a_{ij} \tilde{f}_{r+j} + (\alpha_i + a\beta_i) u_1 + b\beta_i u_2 \ \ i = 1, 2, \dots, N-r,$$

также целые и гармонические по u_1, u_2 функции, причем, в силу (22), ограниченные снизу:

$$h_i(u_1, u_2) \geq \gamma_i, \;\; i = 3, \dots, N.$$

По теореме Лиувилля для гармонических функций

$$h_i(u_1, u_2) = \gamma_i' \equiv \text{const}.$$

Из условия $\det\{a_{ij}\} \neq 0$ вытекает, что $\tilde{f}_{r+1}(u_1, u_2), \dots, \tilde{f}_N(u_1, u_2)$ линейно зависят от u_1, u_2, а функции $F_{r+1}(y_1, y_2), \dots, F_N(y_1, y_2)$, соответственно, от y_1, y_2. Таким образом, при $i = r+1, \dots, N$, выполнено

$$F_i(y_1, y_2) = A_i y_1 + B_i y_2 + C_i,$$

где A_i, B_i, C_i — некоторые постоянные.

Осталось доказать линейность $F_i(y_1, y_2)$ при $i = 3, \dots, r$. Если для системы (3) выполнено условие (a), то для данных i будут справедливы неравенства

$$|F_{i,y_1}(y_1, y_2)| \leq \Upsilon(A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_N) \equiv \text{const},$$

т.е. производные F_{i,y_1} будут ограничены.

Далее заметим, что $F_{i,y_1} = \tilde{f}_{i,u_1} - \frac{a}{b}\tilde{f}_{i,u_2}$. Так как частные производные $\tilde{f}_{i,u_1}$, $\tilde{f}_{i,u_2}$ целых гармонических функций суть целые гармонические функции, то по теореме Лиувилля для гармонических функций заключаем, что F_{i,y_1} есть некоторые константы A_i, а функции $F_i(y_1, y_2)$ имеют вид

$$F_i(y_1, y_2) = A_i y_1 + g_i(y_2),$$

где $g_i(y_2)$ — некоторые дифференцируемые функции. Из гармоничности $\tilde{f}_i(u_1, u_2) = A_i u_1 + g_i(au_1 + bu_2)$ по u_1, u_2 вытекает, что $g_i'' \equiv 0$. Отсюда

$$g_i(y_2) = B_i y_2 + C_i,$$

и тем самым, при $i = 3, \dots, r$, функции $F_i(y_1, y_2)$ также линейно зависят от y_1, y_2.

Для случая (b) рассуждения аналогичны. Теорема доказана.

В вырожденном случае $r = N$, т.е. либо условия (a$'$), либо (b$'$), вместо угла следует рассматривать все пространство $\mathbb{R}^N$ и никакие дополнительные условия типа (21) здесь не требуются. Такими же рассуждениями как в доказанной теореме мы приходим к следующей теореме.

Теорема 4. *Предположим, что множество $\mathcal{D}$ системы* (3) *удовлетворяет одному из условий: (a$'$) или (b$'$). Тогда любой $\mathcal{A}$-график $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ — двумерная плоскость.*

Доказанные теоремы суть версии теоремы С.Н. Бернштейна для псевдоевклидовых пространств, доказанных ранее в [6, 7, 8]. Поэтому с учетом примеров 1 и 2, условия (a), (a$'$), (b), (b$'$) можно интерпретировать как "псевдоевклидовость" системы (3). Другие версии и обобщения теоремы С.Н. Бернштейна для поверхностей в псевдоевклидовых пространствах можно найти, например, в работах [16, 17, 18].

3. Поведение $\mathcal{A}$-графиков в бесконечно удаленной точке

3.1. Предположим, что $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2_{(y_1,y_2)}$ — компактное множество, а Ω — его внешность в $\mathbb{R}^2_{(y_1,y_2)}$. Пусть $\mathcal{M}$ — $\mathcal{A}$-график, заданный над Ω, с помощью (2).

Пусть $\mathrm{e} \in \mathbb{R}^N$ — произвольный постоянный вектор. Тогда функция $f_{\mathrm{e}}(x) = \langle \mathfrak{f}(x), \mathrm{e} \rangle$ будет гармонической в $\mathcal{A}$-метрике $ds^2_{\mathfrak{f}}$.

Обозначим через $\mathcal{C}(f_{\mathrm{e}})$ множество предельных значений функции $f_{\mathrm{e}}(x)$ при $(f_1(x), f_2(x)) \to \infty$. Описание структуры этого множества содержится в следующей теореме.

Теорема 5. *При сделанных относительно поверхности $\mathcal{M}$ предположениях либо $\mathcal{C}(f_{\mathrm{e}})$ состоит из одной точки расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}}$, либо $\mathcal{C}(f_{\mathrm{e}}) = \overline{\mathbb{R}}$.*

Доказательство. Пусть

$$ds^2_{\mathfrak{f}} = b_{11}(y_1,y_2)dy_1^2 + 2b_{12}(y_1,y_2)dy_1dy_2 + b_{22}(y_1,y_2)dy_2^2$$

— $\mathcal{A}$-метрика $ds^2_{\mathfrak{f}}$ в координатах $(y_1, y_2) \in \Omega$.

По теореме 1 можно задать ограниченную односвязную область $Q \supset \mathcal{K}$ и конформное отображение $\mathbb{R}^2_{(y_1,y_2)} \setminus \overline{Q}$ на область $\{v = v_1 + iv_2 : \ |v| > R\} \subset \mathbb{C}_v$ $(R > 0)$, переводящее бесконечно удаленную точку плоскости $\mathbb{R}^2_{(y_1,y_2)}$ в бесконечно удаленную точку плоскости $\mathbb{C}_v$. При этом координаты v_1, v_2 являются изотермическими.

Пусть $x_1(v_1,v_2), x_2(v_1,v_2)$ параметрическое представление независимых переменных x_1, x_2 через v_1, v_2. Тогда функция $\tilde{f}_{\mathrm{e}}(v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f_{\mathrm{e}}(x(v))$ суть гармоническая.

Рассмотрим в $\{v = v_1 + iv_2 : \ |v| > R\}$ функцию, вообще говоря, многозначную, заданную по формуле

$$\tilde{g}_{\mathrm{e}}(v) = \int\limits_{v_0}^{v} -\tilde{f}_{\mathrm{e}v_2} dv_1 + \tilde{f}_{\mathrm{e}v_1} dv_2,$$

где v_0 — некоторая фиксированная точка в $\{v = v_1 + iv_2 : \ |v| > R\}$, а интеграл берется вдоль произвольного спрямляемого пути, лежащего в $\{v = v_1 + iv_2 : \ |v| > R\}$ и соединяющего v_0 с v.

Функция $w = F_{\mathrm{e}}(v) = \tilde{f}_{\mathrm{e}}(v) + i\tilde{g}_{\mathrm{e}}(v)$ будет аналитической в $\{v = v_1 + iv_2 : \ |v| > R\} \subset \mathbb{C}_v$.

Пусть γ простой замкнутый спрямляемый контур, охватывающий круг $\{v = v_1 + iv_2 : \ |v| \le \mathbb{R}\}$, имеющий положительное направление обхода. Тогда интеграл

$$\omega = \int\limits_{\gamma} -\tilde{f}_{\mathrm{e}v_2} dv_1 + \tilde{f}_{\mathrm{e}v_1} dv_2$$

не зависит от выбора такого контура γ, что легко доказывается стандартными рассуждениями с помощью формулы Стокса.

Если $\omega = 0$, то функция $w = F_{\mathrm{e}}(v)$ голоморфна в $\{v = v_1 + iv_2 : \ |v| > R\}$, и по теореме Ю.В. Сохоцкого (см., например, [1, С. 144]) ее множеством предельных значений при $v \to \infty$ будет либо расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}_w$, либо только одна точка $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}_w$. Поскольку $\tilde{f}_{\mathrm{e}}(v) = \mathrm{Re}\, F_{\mathrm{e}}(v)$, то утверждение теоремы имеет место.

Если $\omega \neq 0$, то рассмотрим голоморфную в $\{v = v_1 + iv_2 : \ |v| > R\}$ функцию

$$w = G(v) = \exp\{\frac{2\pi}{\omega} F_{\mathrm{e}}(v)\}.$$

Применяя теорему Сохоцкого к этой функции, и замечая, что

$$f_{\mathrm{e}}(v) = \frac{\omega}{2\pi} \ln \ |G(v)|,$$

получим утверждение теоремы и для случая $\omega \neq 0$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если $\mathcal{A}$-график $\mathcal{M}$ расположен в полупространстве $\langle \mathrm{y}, \mathrm{e}\rangle < C$, где C некоторая постоянная, то существует предел*

$$\lim_{\substack{f_1(x)\to\infty \\ f_2(x)\to\infty}} f_{\mathrm{e}}(x) \in [-\infty, C].$$

Следствие 2. *Если $\mathcal{A}$-график $\mathcal{M}$ лежит в слое между двумя гиперплоскостями $\langle \mathrm{y}, \mathrm{e}\rangle = c_1$ и $\langle \mathrm{y}, \mathrm{e}\rangle = c_2$, то при стремлении $(f_1(x), f_2(x)) \to \infty$ $\mathcal{M}$ асимптотически приближается к некоторой гиперплоскости $\langle \mathrm{y}, \mathrm{e}\rangle = c$, т.е. предел*

$$c = \lim_{\substack{f_1(x)\to\infty \\ f_2(x)\to\infty}} f_{\mathrm{e}}(x)$$

существует и конечен.

В заключении этого параграфа приведем еще одну теорему лиувиллева типа.

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ — целый $\mathcal{A}$-график. Предположим, что существует гиперплоскость Π не пересекающая $\mathcal{M}$. Тогда $\mathcal{M}$ лежит в некоторой гиперплоскости Π_1, параллельной Π.*

Доказательство. Пусть гиперплоскость Π задана уравнением $\langle \mathrm{y}, \mathrm{e}\rangle = c$, где $\mathrm{e} \in \mathbb{R}^N$ — некоторый фиксированный вектор, c — постоянное число, а $\mathcal{M}$ находится в полупространстве $\langle \mathrm{y}, \mathrm{e}\rangle \leq c$.

Пусть как и в предыдущей теореме

$$ds^2_{\mathfrak{f}} = b_{11}(y_1, y_2)dy_1^2 + 2b_{12}(y_1, y_2)dy_1dy_2 + b_{22}(y_1, y_2)dy_2^2$$

— метрика $ds^2_{\mathfrak{f}} = \mathcal{A}(x, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}_{x_1}, \mathfrak{f}_{x_2})(dx_1, dx_2)$ в координатах $(y_1, y_2) \in \Omega = \mathbb{R}^2_{(y_1,y_2)}$.

По теореме 2 метрику $ds^2_{\mathfrak{f}}$ можно привести к конформному виду с помощью некоторого линейного преобразования (10). Тогда областью изменения переменной $u = u_1 + iu_2$ будет вся плоскость $\mathbb{C}_u$.

Рассмотрим функцию $f_{\mathrm{e}}(x) = \langle \mathfrak{f}(x), \mathrm{e}\rangle$ гармоническую в метрике $ds^2_{\mathfrak{f}}$. Пусть $x_1 = x_1(u_1, u_2)$, $\quad x_2 = x_2(u_1, u_2)$, соответствующее выражение переменных x_1, x_2 через u_1, u_2. Тогда $\tilde{f}_{\mathrm{e}}(u) \overset{\mathrm{def}}{=} f_{\mathrm{e}}(x(u))$ суть целая, гармоническая по u_1, u_2, ограниченная сверху функция. По теореме Лиувилля для гармонических функций $\tilde{f}_{\mathrm{e}}(u)$ суть константа, что и доказывает теорему.

4. Теоремы типа Лиувилля и Фрагмена—Линделефа для $\mathcal{A}$-трубок

4.1. В этом параграфе рассмотрим класс $\mathcal{A}$-поверхностей в $\mathbb{R}^N$, которые, следуя [13], будем называть $\mathcal{A}$-*трубчатыми* или просто $\mathcal{A}$-*трубками*.

Пусть e — фиксированный вектор единичной длины в $\mathbb{R}^N$. Для произвольного вещественного числа t, через $\Pi(t)$ обозначим гиперплоскость $\{\mathrm{y} :\ \langle \mathrm{y}, \mathrm{e}\rangle = t\} \subset \mathbb{R}^N$.

Пусть всюду далее $(\cdot,\cdot)$ — скалярное прозведение в $\mathcal{A}$-метрике ds^2_{f}, а ∇ и Δ — операция взятия градиента и лапласиан этой метрике.

Рассмотрим $\mathcal{A}$-поверхность $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$, заданную C^2-погружением (2).

Определение 7. Поверхность $\mathcal{M}$ называется $\mathcal{A}$-*трубкой* относительно направления e с проекцией (a,b) $(-\infty \le a < b \le +\infty)$, если выполняются условия:

1) погружение $\mathrm{y} = \mathrm{f}(x)$ собственно, то есть прообраз $\mathrm{f}^{-1}(K)$ любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^N$ компакт в D;

2) множество $\Sigma_t = \Pi(t) \cap \mathcal{M}$ компактно в $\mathcal{M}$, не пусто и не содержит точек края $\partial\mathcal{M}$;

3) всякая порция поверхности $\mathcal{M}$, заключенная между гиперплоскостями $\Pi(t_1)$ и $\Pi(t_2)$, где $t_1, t_2 \in (a,b)$, компактное множество в $\mathcal{M}$.

Будем говорить, что $\mathcal{A}$-поверхность $\mathcal{M}$ *трубчатая в целом* или *целая $\mathcal{A}$-трубка* если $(a,b) = (-\infty, +\infty)$.

Как и ранее рассмотрим функцию $t = f_{\mathrm{e}}(x) = \langle \mathrm{f}(x), \mathrm{e}\rangle$, и для произвольных $t, t_1, t_2 \in (a,b)$, $t_1 < t_2$, введем обозначения:

$$\begin{aligned} P_t &= \{x :\ f_{\mathrm{e}}(x) < t\},\\ Q_t &= \{x :\ f_{\mathrm{e}}(x) > t\},\\ E_t &= \{x :\ f_{\mathrm{e}}(x) = t\},\\ D_{t_1,t_2} &= \{x :\ t_1 < f_{\mathrm{e}}(x) < t_2\}. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу предположения 1), множество E_t компактно в D.

Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{M}$ — $\mathcal{A}$-трубка с проекцией (a,b). Тогда для произвольной пары чисел $t_1, t_2 \in (a,b)$, $t_1 < t_2$, выполняется равенство:*

$$\mathrm{cap}\,(\overline{P}_{t_1}, \overline{Q}_{t_2}; D) = \frac{J}{t_2 - t_1},$$

где $J > 0$ — некоторая константа.

Доказательство леммы 2. Покажем сначала, что интеграл

$$J = \int\limits_{E_t} |\nabla f_{\mathrm{e}}| ds_{\mathrm{f}} > 0,$$

где $|\nabla f_{\mathrm{e}}|$ — модуль градиента в метрике ds^2_{f}, не зависит от t.

Возьмем произвольно пару чисел $\tau_1, \tau_2 \in (a,b)$, для определенности считая $\tau_1 < \tau_2$. Тогда с учетом гармоничности $f_{\mathrm{e}}(x)$ в $\mathcal{A}$-метрике ds^2_{f}, по формуле Стокса получаем равенство

$$\int\limits_{D_{\tau_1,\tau_2}} \Delta f_{\mathrm{e}} d\sigma = \int\limits_{\partial D_{\tau_1,\tau_2}} (\nabla f_{\mathrm{e}}, \vec{\nu}) ds_{\mathrm{f}} = 0, \tag{24}$$

в котором $\vec{\nu}$ и $d\sigma$, соответственно, единичная нормаль и элемент площади в метрике ds^2_{f} к $\partial D_{\tau_1,\tau_2}$.

Очевидно, $\partial D_{\tau_1\tau_2} = E_{\tau_1} \cup E_{\tau_2}$. Поскольку E_t суть линии уровня функции $t = f_{\mathrm{e}}(x)$, то, неограничивая общности, можно считать, что

$$\vec{\nu} = \frac{\nabla f_{\mathrm{e}}(x)}{|\nabla f_{\mathrm{e}}(x)|} \text{ на } E_{\tau_2} \text{ и } \vec{\nu} = -\frac{\nabla f_{\mathrm{e}}(x)}{|\nabla f_{\mathrm{e}}(x)|} \text{ на } E_{\tau_1}. \tag{25}$$

Подставляя (25) в (24), получим

$$\int\limits_{E_{\tau_1}} |\nabla f_{\mathrm{e}}| ds_{\mathrm{f}} = \int\limits_{E_{\tau_2}} |\nabla f_{\mathrm{e}}| ds_{\mathrm{f}}.$$

Далее, в вариационной задаче

$$\mathrm{cap}\,(\overline{P}_{t_1}, \overline{Q}_{t_2}; D) = \inf_{\varphi} \int\limits_{D} |\nabla \varphi(x)|^2 d\sigma, \tag{26}$$

положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, \ x \in \overline{P}_{t_1}, \\ \dfrac{t_2 - f_{\mathrm{e}}(x)}{t_2 - t_1}, \ x \in D_{t_1,t_2}, \\ 0, x \in \overline{Q}_{t_2}. \end{cases}$$

Тогда при $x \in D_{t_1,t_2}$ будем иметь $|\nabla\varphi|^2 = \dfrac{|\nabla f_{\mathrm{e}}|^2}{(t_2-t_1)^2}$ и, следовательно, будет справедливо неравенство

$$\mathrm{cap}\,(\overline{P}_{t_1}, \overline{Q}_{t_2}; D) \le \frac{1}{(t_2-t_1)^2} \int\limits_{D} |\nabla f_{\mathrm{e}}|^2 d\sigma.$$

Откуда, воспользовавшись формулой Кронрода—Федерера [14], получим оценку

$$\mathrm{cap}\,(\overline{P}_{t_1}, \overline{Q}_{t_2}; D) \le \frac{J}{t_2 - t_1}.$$

Чтобы убедиться в наличии равенства, достаточно заметить, что функция $\varphi(x)$ гармонична в метрике поверхности $\mathcal{F}$ и, следовательно, доставляет минимум в вариационной задаче (26). Лемма доказана.

Для целых $\mathcal{A}$-трубок можно аналогичными рассуждениями установить следующую "двустороннюю" версию предыдущего утверждения.

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{M}$ — целая $\mathcal{A}$-трубка, и $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ $(t_1 < t_2)$ — произвольная пара положительных чисел. Тогда*

$$\operatorname{cap}\,(\overline{D}_{-t_1,t_1}, \overline{D} \setminus D_{-t_2,t_2}; D) = \frac{2J}{t_2 - t_1},$$

где $J > 0$ — некоторая константа.

4.2. Следующие теоремы описывают геометрическое строение $\mathcal{A}$-трубок. Их доказательства базируются на методе развитом в работах [15, 13].

Теорема 7. *Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ — целая $\mathcal{A}$-трубка. Если существует гиперплоскость Π не пересекающая $\mathcal{M}$, то $\mathcal{M}$ содержится в некоторой гиперплоскости Π_1, параллельной Π.*

Доказательство. Пусть гиперплоскость Π задается уравнением

$$\langle \mathrm{y}, \mathrm{p} \rangle = c,$$

где $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^N$ $(\mathrm{p} \neq 0)$ — фиксированный вектор, а c — постоянное число.

Предположим для определенности, что $\mathcal{M}$ расположена в полупространстве $\langle \mathrm{y}, \mathrm{p} \rangle < c$, и рассмотрим гармоническую в метрике ds^2_{f} функцию $f_{\mathrm{p}}(x) = \langle \mathrm{f}(x), \mathrm{p} \rangle$.

Зафиксируем произвольным образом точку $x^{(0)} \in D$ и зададим произвольную постоянную $c_1 < f_{\mathrm{p}}(x^{(0)})$. Обозначим через $\mathcal{O}$ компоненту связности открытого множества $\{x : \ f_{\mathrm{p}}(x) > c_1\}$, содержащую точку $x^{(0)}$. Очевидно $\mathcal{O} \neq \emptyset$, а функция $f_{\mathrm{p}}(x) - c_1$ ограничена на $\mathcal{O}$ и обращается в 0 на $\partial\mathcal{O}$.

Пусть $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$ — произвольное компактное множество. Зафиксируем t_0 так, чтобы $\mathcal{K} \subset D_{-t_0,t_0}$ и будем рассматривать $t > t_0$.

Зададим локально липшицеву функцию $\varphi(x)$, допустимую при вычислении емкости конденсатора $(\mathcal{K}, D \setminus D_{-t,t}; D)$. Тогда функция

$$g(x) = (f_{\mathrm{p}}(x) - c_1)\varphi^2(x)$$

будет обращаться в 0 всюду на границе множества $\mathcal{O} \bigcap D_{-t,t}$.

Воспользовавшись формулой Стокса, нетрудно получить равенство

$$\int\limits_{\mathcal{O} \bigcap D_{-t,t}} (\nabla g, \nabla f_{\mathrm{p}}) d\sigma = - \int\limits_{\mathcal{O} \bigcap D_{-t,t}} g \Delta f_{\mathrm{p}} d\sigma.$$

Поскольку $\Delta f_{\mathrm{p}} = 0$, то из последнего соотношения следует, что

$$\int\limits_{\mathcal{O} \bigcap D_{-t,t}} \varphi^2 |\nabla f_{\mathrm{p}}|^2 d\sigma = -2 \int\limits_{\mathcal{O} \bigcap D_{-t,t}} \varphi (f_{\mathrm{p}} - c_1)(\nabla \varphi, \nabla f_{\mathrm{p}}) d\sigma. \tag{27}$$

Замечая, что $|(\nabla\varphi, \nabla f_{\mathrm{p}})| \leq |\nabla\varphi||\nabla f_{\mathrm{p}}|$, и применяя к правой части (27) интегральное неравенство Коши, получим

$$\int\limits_{\mathcal{O} \bigcap D_{-t,t}} \varphi^2 |\nabla f_{\mathrm{p}}|^2 d\sigma \leq 2 \left(\int\limits_{\mathcal{O} \bigcap D_{-t,t}} (f_{\mathrm{p}} - c_1)^2 |\nabla \varphi|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\mathcal{O} \bigcap D_{-t,t}} \varphi^2 |\nabla f_{\mathrm{p}}|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Откуда нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{\mathcal{O}\bigcap D_{-t,t}} \varphi^2|\nabla f_{\rm p}|^2 d\sigma \le 4(c-c_1)^2 \int\limits_{\mathcal{O}\bigcap D_{-t,t}} |\nabla\varphi|^2 d\sigma \le 4(c-c_1)^2 \int\limits_D |\nabla\varphi|^2 d\sigma.$$

Учитывая, что $\varphi(x) = 1$ при $x \in \mathcal{K}$, и, переходя к точной нижней грани по всем $\varphi(x)$, допустимым для вычисления емкости конденсатора $(\mathcal{K}, D \setminus \overline{D}_{-t,t}; D)$, будем иметь

$$\int\limits_{\mathcal{K}} |\nabla f_{\rm p}|^2 d\sigma \le 4(c-c_1)^2 \text{cap}\,(\mathcal{K}, D \setminus \overline{D}_{-t,t}; D).$$

Откуда в силу свойства монотонности емкости (6) и леммы 3, получаем

$$\int\limits_{\mathcal{K}} |\nabla f_{\rm p}|^2 d\sigma \le \frac{8(c-c_1)^2 J}{t-t_0}.$$

Устремляя t к $+\infty$, делаем вывод, что $|\nabla f_{\rm p}| \equiv 0$ на $\mathcal{K}$. В силу произвола в выборе $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$, заключаем, что $f_{\rm p}(x) \equiv f_{\rm p}(x^{(0)})$ при всех $x \in \mathcal{O}$, а в силу произвола в выборе константы c_1 и всюду в D. Это означает, что $\mathcal{M}$ расположена в гиперплоскости $\langle {\rm y}, {\rm p}\rangle = f_{\rm p}(x^{(0)})$. Теорема доказана.

Требование, чтобы $\mathcal{A}$-трубка $\mathcal{M}$ лежала в полупространстве можно несколько ослабить, что вытекает из следующей теоремы.

Теорема 8. *Пусть $\mathcal{M}$ — трубчатая относительно вектора ${\rm e} \in \mathbb{R}^N$ $\mathcal{A}$-поверхность с проекцией $(a, +\infty)$. Пусть ${\rm p} \in \mathbb{R}^N$ — некоторый фиксированный вектор, и пусть $\rho(t) = \max\limits_{E_t} \langle {\rm y}, {\rm p}\rangle$. Предположим, что $\rho(t_0) \le \rho_0 < \infty$ при некотором $t_0 \in (a, +\infty)$. Тогда либо $\rho(t) \le \rho_0$ при $t > t_0$, либо*

$$\varliminf_{t\to+\infty} \frac{\rho(t)}{t} > 0. \tag{28}$$

Доказательство теоремы 8. Пусть, как и в предыдущей теореме,

$$f_{\rm p}(x) = \langle {\rm f}(x), {\rm p}\rangle, \quad f_{\rm e}(x) = \langle {\rm f}(x), {\rm e}\rangle.$$

Допустим, что $\rho(t) > \rho_0$ при некотором $t > t_0$. Выберем точку $x^{(1)} \in D$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$f_{\rm p}(x^{(1)}) > \rho_0, \quad f_{\rm e}(x^{(1)}) > t_0.$$

Обозначим через $\mathcal{O}$ компоненту связности множества $\{x : \ f_{\rm p}(x) > \rho_0\}$, содержащую точку $x^{(1)}$, и зададим произвольно компакт $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$.

Положим $t' = \max\limits_{x\in\mathcal{K}} f_{\rm e}(x)$ и возьмем произвольно число $t > t'$.

Зададим локально липшицеву функцию $\varphi(x)$, допустимую при вычислении емкости конденсатора $(\overline{P}_{t'}, \overline{Q}_t; D)$. Тогда функция

$$g(x) = \varphi^2(x)(f_{\rm p}(x) - \rho_0)$$

будет иметь компактный носитель, содержащийся в $\mathcal{O}$.

По формуле Стокса нетрудно получить равенство

$$\int\limits_{\mathcal{O}} (\nabla g, \nabla f_{\mathrm{p}}) d\sigma = -\int\limits_{\mathcal{O}} g \Delta f_{\mathrm{p}} d\sigma.$$

Далее, воспользовавшись гармоничностью $f_{\mathrm{p}}(x)$ в метрике ds_{f}^2 и рассуждениями как при доказательстве предыдущей теоремы, приходим к неравенству

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \varphi^2 |\nabla f_{\mathrm{p}}|^2 d\sigma \leq 4 \int\limits_{\mathcal{O}} (f_{\mathrm{p}} - \rho_0)^2 |\nabla \varphi|^2 d\sigma,$$

из которого в свою очередь, получаем

$$\int\limits_{\mathcal{K}} |\nabla f_{\mathrm{p}}|^2 d\sigma \leq 4 \int\limits_{\mathcal{O} \setminus (\overline{P}_{t'} \bigcup \overline{Q}_t)} (f_{\mathrm{p}} - \rho_0)^2 |\nabla \varphi|^2 d\sigma. \tag{29}$$

По принципу максимума для любого $x \in \mathcal{O} \setminus (\overline{P}_{t'} \bigcup \overline{Q}_t)$ выполнено неравенство

$$(f_{\mathrm{p}}(x) - \rho_0)^2 \leq (\rho(t) - \rho_0)^2.$$

Тогда из (29) и свойства монотонности емкости вытекает оценка

$$\int\limits_{\mathcal{K}} |\nabla f_{\mathrm{p}}|^2 d\sigma \leq (\rho(t) - \rho_0)^2 \mathrm{cap}\, (\overline{P}_{t'}, \overline{Q}_t; D),$$

и, согласно результату леммы 2,

$$\int\limits_{\mathcal{K}} |\nabla f_{\mathrm{p}}|^2 d\sigma \leq (\rho(t) - \rho_0)^2 \frac{J}{t - t'}, \tag{30}$$

где J — некоторая константа.

Из последнего неравенства получаем, что

$$\varliminf_{t \to +\infty} \frac{\rho(t)}{\sqrt{t}} > 0. \tag{31}$$

Действительно, если соотношение (31) не выполняется, то из неравенства (30) следует, что всюду на $\mathcal{K}$

$$|\nabla f_{\mathrm{p}}(x)| = 0.$$

Пользуясь произволом в выборе $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$, заключаем, что $f_{\mathrm{p}} \equiv \mathrm{const}$ на $\mathcal{O}$. Это противоречит выбору точки $x^{(1)} \in \mathcal{O}$, в которой $f_{\mathrm{p}}(x^{(1)}) > \rho_0$.

Таким образом, с учетом леммы 1, $\rho(t)$ неограниченная выпуклая вниз на $[t_0, +\infty)$ функция. Тем самым ее порядок не меньше 1 и, значит, выполнено неравенство (28). Теорема доказана.

Доказанные теоремы 7, 8 можно рассматривать как геометрические версии теорем Лиувилля типа Фрагмена—Линделефа.

Summary

SYSTEMS OF ZERO MEAN CURVATURE TYPE

A.N. Kondrashov

Let $\mathcal{M}$ be a 2-dimensional surface in $\mathbb{R}^N$ is given by injection $\mathrm{y} = \mathrm{f}(x) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^N$, where $x = (x_1, x_2) \in D$. If $\mathrm{y} = \mathrm{f}(x)$ is the solution of system of equations

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{d}{dx_i} \left(A_{ij}(x, \mathrm{f}, \mathrm{f}_{x_1}, \mathrm{f}_{x_2}) \mathrm{f}_{x_j} \right) = 0,$$

where functions $A_{ij} = A_{ji}$ are satisfied to structural condition

$$A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = 1,$$

then $\mathcal{M}$ is called $\mathcal{A}$-surface. The $\mathcal{A}$-surfaces are generalization of two-dimensional surfaces of a zero mean curvature in pseudoeuclidean space.

In the paper we research the $\mathcal{A}$-surface.

Литература

1. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1991.

2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.

3. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра. М: Наука, 1986.

4. Кондрашов А.Н. Об одном признаке параболичности римановой метрики на плоскости // Вестник ВолГУ. Сер.1: Математика. Физика. 1999. Вып. 4.

5. Бернштейн С.Н. Об одной геометрической теореме и ее приложениях к уравнениям в частных производных эллиптического типа // Бернштейн С.Н. Собр. соч. Т. 3. М.: Изд-во АН СССР, 1960.

6. Кондрашов А.Н. Двумерные минимальные поверхности в псевдоевклидовом пространстве // Докл. АН России. 1999. Т. 365. № 3. с. 319—321.

7. Кондрашов А.Н. Двумерные поверхности нулевой средней кривизны в псевдоевклидовом пространстве // В сб. Научные школы Волгоградского государственного университета. Геометрический анализ и его приложенния. Волгоград: Изд-во Волгоградского государственного университета. 1999.

8. Кондрашов А.Н. Поверхности в $\mathbb{R}_r^{n+r}$// Гл. 6 в монографии “В.А. Клячин, В.М. Миклюков, Трубки и ленты в пространстве-времени. Волгоград: 2004, (Юбил. Серия ”Труды ученых ВолГУ”), С.269-284.”

9. Кондрашов А.Н. Геометрические свойства одного класса систем дифференциальных уравнений // ВолГУ Волгоград, 1998. Деп. в ВИНИТИ. 7.12.98. №3585-В98.

10. Кондрашов А.Н. Теорема Бернштейна для систем уравнений типа НСК // Тезисы докладов международной конференции по анализу и геометрии посвященной 70-летию академика Ю.Г. Решетняка. Новосибирск. Изд-во института математики. 1999.

11. Миклюков В.М. О конформном типе поверхностей, теорема Лиувилля и теорема Бернштейна // ДАН СССР. 1978. Т. 242. № 3 с. 537—540.

12. Миклюков В.М. Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей // Изв. РАН. Сер. мат. 1996. Т. 60. № 4. с. 111—158.

13. Миклюков В.М., Ткачев В.Г. Некоторые свойства трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности // Мат. сб. 1989. Т. 180(222). с. 1278—1295.

14. Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. Геометрические неравенства. Л.: Наука, 1980.

15. Миклюков В.М. О некоторых свойствах трубчатых минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^n$ // ДАН СССР. 1979. Т. 247. № 3. с. 549—552.

16. Zheng, Quan. Maximal spacelike submanifolds of dimension **n** in the Lorentz—Minkowski space $\mathbf{L}^{n+p}$ // Sichuan Daxue Xuebao. 32(1995) № 4. p. 372—376.

17. Xin and Ye. Bernstein-type theorems for space-like surfaces with parallel mean curvature // J. reine angew. Math. 489 (1997). p. 189—198.

18. Calabi E. Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations // Proc. Sys. Pure Math. 15(1970). p. 223—230.