



УДК 621.3.013.32  
ББК 3.31

**ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ РАСЧЕТА  
ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ  
В КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ  
МЕТОДОМ ДВОЙНОГО СЛОЯ**

*И.П. Стадник, Д.М. Филиппов*

Путем применения закона полного тока в интегральной форме для контуров, охватывающих каждый отрезок разбиения границы раздела сред, получена система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных значений плотности двойного слоя при использовании непрерывной кусочно-линейной аппроксимации. Применение данной СЛАУ позволяет повысить точность расчета магнитного поля по сравнению с методом коллокаций решения интегрального уравнения.

*Ключевые слова:* СЛАУ, интегральное уравнение, двойной слой зарядов, метод коллокаций, кусочно-однородная среда, магнитоэстатическое поле.

**Введение**

Одним из основных методов решения интегральных уравнений (ИУ) является метод коллокаций [1, с. 168]. На практике положение точек коллокаций выбирается из соображений простоты (например, в центрах отрезков разбиения), что не всегда является оптимальным. В работах (см.: [2; 3]) предложен численный метод, в котором точки коллокаций не задаются вовсе. При этом достигается существенное преимущество по точности расчета магнитного поля и, как следствие, по объему вычислений по сравнению с методом коллокаций решения ИУ. В [2] в качестве вторичных источников рассмотрен простой слой зарядов, в [3] – простой слой токов. В данной статье в качестве вторичных источников рассматривается двойной слой зарядов.

Пусть в магнитоэстатическое плоскопараллельное поле  $\vec{B}_0$ , заданное в пространстве с магнитной проницаемостью  $\mu_0$ , помещен цилиндр произвольной формы сечения. Магнитная проницаемость материала цилиндра постоянна и равна  $\mu$  (см. рис. 1). Необходимо рассчитать результирующее магнитное поле.

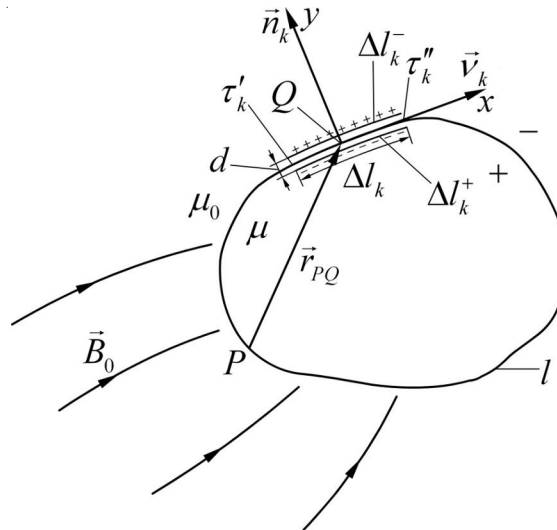


Рис. 1. Сечение магнитной системы цилиндра

**1. Кусочно-постоянная аппроксимация плотности  $\tau$**

Двойной слой образован двумя разноименно заряженными слоями с плотностью  $\sigma$ . Плотность двойного слоя равна  $\tau = \sigma d$  (рис. 1).

ИУ относительно плотности двойного слоя имеет вид [5, с. 140]:

$$\tau(Q) + \frac{1}{\pi} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \oint_l \frac{(\vec{r}(P), \vec{r}_{PQ})}{r_{PQ}^2} dl_P = \frac{2(\mu_0 - \mu)}{\mu + \mu_0} \varphi_0(Q). \tag{1}$$

Здесь  $\vec{r}_{PQ}$  ясно из рисунка 1,  $\varphi_0(Q)$  – потенциал поля  $\vec{B}_0$  ( $\vec{B}_0 = -grad \varphi_0$ ). При выводе уравнения (1) было использовано условие:

$$\frac{j^+(Q)}{m} = \frac{j^-(Q)}{m_0}. \tag{2}$$

Заметим, что при кусочно-постоянной аппроксимации функции  $\tau(Q)$  граничное условие  $H_n^+ = H_n^-$  не выполняется ни в одной точке  $Q$  границы.

На самом деле при условии  $\tau(Q) = \tau_k = const$  легко получить:

$$\frac{\oint j}{\oint n}(Q^+) = \frac{\oint j}{\oint n}(Q^-) \tag{3}$$

где  $Q^+$  и  $Q^-$  – предельные точки границы внутри и снаружи цилиндра.

Но тогда  $\frac{1}{m} \frac{\oint j}{\oint n}(Q^+) \stackrel{m_0}{=} \frac{1}{m_0} \frac{\oint j}{\oint n}(Q^-)$ , то есть

$$H_n(Q^+) \stackrel{m_0}{=} H_n(Q^-). \tag{4}$$

Тем не менее известно [4], что использование кусочно-постоянной аппроксимации искомой функции  $\tau(Q)$  в ИУ (1) позволяет рассчитывать поле  $\vec{B}$  с весьма высокой точностью. Это объясняется тем, что граничное условие  $H_n(Q^+) = H_n(Q^-)$  при переходе от ИУ (1) к его конечномерному аналогу выполняется в среднем.

Проиллюстрируем сказанное. Так как при получении СЛАУ из ИУ (1) требуется выполнение равенств:

$$\frac{j(Q_1^+)}{m} = \frac{j(Q_1^-)}{m_0}, \frac{j(Q_2^+)}{m} = \frac{j(Q_2^-)}{m_0}, \dots, \frac{j(Q_k^+)}{m} = \frac{j(Q_k^-)}{m_0}, \dots, \frac{j(Q_N^+)}{m} = \frac{j(Q_N^-)}{m_0}, \quad (5)$$

где  $N$  – число элементов разбиения границы, то из них следует

$$\frac{j(Q_{k+1}^+) - j(Q_k^+)}{m} = \frac{j(Q_{k+1}^-) - j(Q_k^-)}{m_0}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

то есть  $\frac{1}{m} \int_{Q_k^+}^{Q_{k+1}^+} B_n^+ dl = \frac{1}{m_0} \int_{Q_k^-}^{Q_{k+1}^-} B_n^- dl$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) или

$$\int_{Q_k^+}^{Q_{k+1}^+} H_n^+ dl = \int_{Q_k^-}^{Q_{k+1}^-} H_n^- dl, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

Формула (7) представляет собой запись закона полного тока в интегральной форме для контура, бесконечно близко прилегающего к границе и проходящего через середины соседних отрезков разбиения (точки  $Q_k$  и  $Q_{k+1}$ ).

## 2. Кусочно-линейная аппроксимация плотности $\tau$

Рассмотрим случай использования кусочно-линейной аппроксимации искомой функции  $\tau(Q)$  в ИУ (1).

Совместим начало декартовой системы координат с центром отрезка  $\Delta l_k$ . Ось  $x$  направим по касательному направлению, ось  $y$  – по нормали (рис. 1).

$$t(Q) = t_k(x) = \frac{t_k^{\check{y}} - t_k^{\check{y}+}}{Dl_k} x + \frac{t_k^{\check{y}+} + t_k^{\check{y}}}{2}, \quad (8)$$

где  $t_k^{\check{y}}$  и  $t_k^{\check{y}+}$  – значения функции  $t_k(x)$  соответственно на левом и правом концах отрезка  $\Delta l_k$ .

Используя (8) и записывая ИУ (1) для двух точек коллокаций, принадлежащих отрезку  $\Delta l_k$  (обозначим эти точки  $Q_k^{\check{y}}$  и  $Q_k^{\check{y}+}$ ), получим СЛАУ:

$$\begin{cases} \int_{i=1}^N A_{\check{y}+}^{\check{y}+} t_i^{\check{y}+} + \int_{i=1}^N B_{\check{y}+}^{\check{y}+} t_i^{\check{y}} = C_{\check{y}+}^{\check{y}+}, & k = 1, 2, \dots, N, \\ \int_{i=1}^N A_{\check{y}}^{\check{y}+} t_i^{\check{y}+} + \int_{i=1}^N B_{\check{y}}^{\check{y}+} t_i^{\check{y}} = C_{\check{y}}^{\check{y}+}, & k = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (9)$$

где  $A_{\check{y}+}^{\check{y}+} = B_{\check{y}+}^{\check{y}+} = \frac{3}{4}$ ,  $A_{\check{y}}^{\check{y}+} = B_{\check{y}}^{\check{y}+} = \frac{1}{4}$ ;  $C_{\check{y}+}^{\check{y}+} = -lj_0(Q_k^{\check{y}+})$ ,  $C_{\check{y}}^{\check{y}+} = -lj_0(Q_k^{\check{y}})$ ;  $l = \frac{m - m_0}{m + m_0}$ ;

$$A_{\check{y}+}^{\check{y}+} = \frac{l}{2p} \int_{Dl_i}^{\check{y}+} \frac{x}{Dl_i} + \frac{1}{2} \frac{(\vec{n}_P, \vec{r}_{PQ_k^{\check{y}+}})}{r_{PQ_k^{\check{y}+}}^2} dx, \quad B_{\check{y}+}^{\check{y}+} = \frac{l}{2p} \int_{Dl_i}^{\check{y}+} \frac{x}{Dl_i} + \frac{1}{2} \frac{(\vec{n}_P, \vec{r}_{PQ_k^{\check{y}}})}{r_{PQ_k^{\check{y}}}^2} dx, \quad (i \neq k);$$

$$A_{\check{y}}^{\check{y}+} = \frac{l}{2p} \int_{Dl_i}^{\check{y}+} \frac{x}{Dl_i} + \frac{1}{2} \frac{(\vec{n}_P, \vec{r}_{PQ_k^{\check{y}+}})}{r_{PQ_k^{\check{y}+}}^2} dx, \quad B_{\check{y}}^{\check{y}+} = \frac{l}{2p} \int_{Dl_i}^{\check{y}+} \frac{x}{Dl_i} + \frac{1}{2} \frac{(\vec{n}_P, \vec{r}_{PQ_k^{\check{y}}})}{r_{PQ_k^{\check{y}}}^2} dx, \quad (i \neq k).$$

При выводе выражений для коэффициентов СЛАУ (9) точки  $Q_k^{\check{y}}$  и  $Q_k^{\check{x}}$  выбирались на расстоянии  $\Delta l_k/4$  влево и вправо от центра отрезка  $\Delta l_k$ .

Уменьшить число неизвестных в СЛАУ (9) (при сохранении выбранного способа аппроксимации) можно путем применения непрерывной аппроксимирующей функции. Для этого достаточно потребовать выполнения равенств  $t_{\check{x}}^k = t_{\check{x}^{k+1}}^k (k = 1, 2, \dots, N - 1)$ ,  $t_{\check{x}}^k = t_{\check{y}}^k$ . Однако, как показали численные расчеты, применение указанного требования к СЛАУ (9) приводит к существенному уменьшению точности расчетов.

Приведем иной вывод СЛАУ, который позволяет применить непрерывную кусочно-линейную аппроксимацию плотности двойного слоя. Данный вывод не предполагает использования ИУ (1).

В соответствии с законом полного тока в интегральной форме для замкнутого контура, охватывающего отрезок  $\Delta l_k$  (рис. 1), можно записать

$$\int_{D_k^+} \vec{H}^+ \vec{n}_k dl = \int_{D_k^-} \vec{H}^- \vec{n}_k dl, k = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

Используя связь между векторами  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$ , из (10) получим:

$$\frac{1}{m} \int_{D_k^+} (\vec{B}_0 + \vec{B}_t + \vec{B}_{t_k}^+) \vec{n}_k dl = \frac{1}{m_0} \int_{D_k^-} (\vec{B}_0 + \vec{B}_t + \vec{B}_{t_k}) \vec{n}_k dl, k = 1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

где  $\vec{B}_0$  – индукция первичного магнитного поля;  $\vec{B}_{t_k}$  – индукция, обусловленная двойным слоем полосы  $\Delta l_k$ ;  $\vec{B}_t$  – индукция, обусловленная двойным слоем на всех остальных отрезках границы.

Очевидно  $\int_{D_k^+} \vec{B}_0 \vec{n}_k dl = \int_{D_k^-} \vec{B}_0 \vec{n}_k dl = \int_{D_k} \vec{B}_0 \vec{n}_k dl$  и  $\int_{D_k^+} \vec{B}_t \vec{n}_k dl = \int_{D_k^-} \vec{B}_t \vec{n}_k dl = \int_{D_k} \vec{B}_t \vec{n}_k dl$ .

Тогда (12) примет вид (для всех  $k = 1, 2, \dots, N$ ):

$$\frac{1}{m} \int_{D_k^+} \vec{B}_{t_k}^+ \vec{n}_k dl + \frac{1}{m} \int_{D_k^-} \vec{B}_{t_k} \vec{n}_k dl + \frac{1}{m} \int_{D_k^+} \vec{B}_{t_k}^+ \vec{n}_k dl - \frac{1}{m_0} \int_{D_k^-} \vec{B}_{t_k} \vec{n}_k dl = 0 \quad (12)$$

По закону полного тока можно записать (рис. 1):

$$\int_{D_k^+} \vec{B}_{t_k}^+ \vec{n}_k dl - \int_{D_k^-} \vec{B}_{t_k} \vec{n}_k dl - s_{k+1} d + s_k d = 0 \quad (13)$$

Из симметрии следует:  $\int_{D_k^-} \vec{B}_{t_k} \vec{n}_k dl = \int_{D_k^+} \vec{B}_{t_k}^+ \vec{n}_k dl$ . Из (13) получаем:

$$\int_{D_k^+} \vec{B}_{t_k}^+ \vec{n}_k dl = \frac{t_{\check{x}^{k+1}}}{2} - \frac{t_{\check{x}}}{2} \quad (14)$$

Представим  $\vec{B}_t$  в выражении (12) в виде  $\vec{B}_t = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i$ , где  $\vec{B}_i$  – индукция магнитного поля, обусловленная  $i$ -й полоской в точках отрезка  $\Delta l_k$ .

Используя выражение для вектора индукции магнитного поля двойного слоя,  $\vec{B}_i$  можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \vec{B}_i(Q) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\tau'_{i+1} - \tau'_i}{\Delta l_i} \int_{\Delta l_i} x_i \frac{2(\vec{n}_i, \vec{r}_{PQ}) \vec{r}_{PQ} - r_{PQ}^2 \vec{n}_i}{r_{PQ}^4} dl_P + \frac{1}{2\pi} \frac{\tau'_{i+1} + \tau'_i}{2} \int_{\Delta l_i} \frac{2(\vec{n}_i, \vec{r}_{PQ}) \vec{r}_{PQ} - r_{PQ}^2 \vec{n}_i}{r_{PQ}^4} dl_P = \\ &= \frac{\tau'_{i+1} - \tau'_i}{\Delta l_i} \vec{b}'_i(Q) + \frac{\tau'_{i+1} + \tau'_i}{2} \vec{b}_i(Q). \end{aligned} \quad (15)$$

Используя представление для  $\vec{B}_\tau$ , выражения (15) и (14), получим СЛАУ:

$$\tau'_{k+1} - \tau'_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N (A_{ki+1} + B_{ki}) \tau'_{i+1} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N (A_{ki} + B_{ki+1}) \tau'_i = C_k, k = 1, 2, \dots, N. \quad (16)$$

В (16)  $A_{ki} = \lambda \int_{\Delta l_k} \left[ \frac{2}{\Delta l_i} \bar{b}'_i(Q) - \bar{b}''_i(Q) \right] \bar{v}_k dl$ ,  $B_{ki} = -\lambda \int_{\Delta l_k} \left[ \frac{2}{\Delta l_i} \bar{b}'_i(Q) + \bar{b}''_i(Q) \right] \bar{v}_k dl$ ,  $C_k = 2\lambda \int_{\Delta l_k} \bar{B}_0 \bar{v}_k dl$ , при  $i = N$  вместо  $i + 1$  надо полагать 1; при  $i = 1$  вместо  $i - 1$  надо полагать  $N$ .

Заметим, что при выводе СЛАУ уравнение (10) может быть записано для контуров, частично охватывающих два смежных отрезка  $l_k$  и  $l_{k+1}$ .

### 3. Пример применения разработанного метода

Рассмотрим пример расчета плоскопараллельного магнитного поля электромагнита (рис. 2). Магнитная проницаемость магнитопровода постоянна и равна  $1000 \mu_0$ . По обмотке электромагнита с числом витков  $w$  течет ток  $I$ .

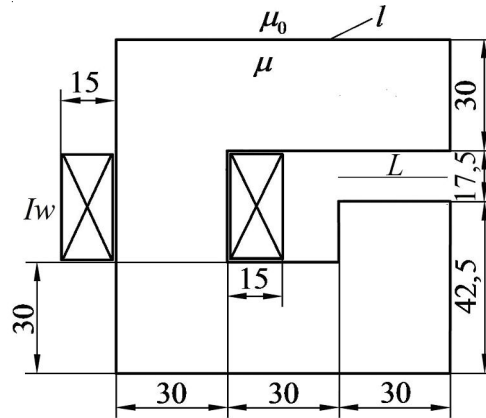


Рис. 2. Магнитная система электромагнита

Для решения задачи воспользуемся СЛАУ (9) и (16) и формулой (15).

Поскольку СЛАУ (9) аппроксимирует ИУ (1), то, очевидно, его решение при увеличении числа разбиений  $N$  стремится к решению ИУ. С помощью расчета установлено такое  $N_{\min} = 260$ , при котором приближенное решение ИУ практически не меняется. Обозначим это решение  $\dot{\tau}_T$ , а соответствующее распределение напряженности магнитного поля в зазоре –  $\vec{H}_T$ . Тогда для любого  $N < N_{\min}$  можно ввести оценки погрешности полученного решения:

$$\xi = \frac{\|\tau - \tau_T\|}{\|\tau_T\|} \cdot 100\%, \quad \eta = \frac{\|\vec{H} - \vec{H}_T\|}{\|\vec{H}_T\|} \cdot 100\%,$$

где  $\|\tau\|^2 = \oint_I \tau^2(P) dl_P$ ,  $\|\vec{H}\|^2 = \oint_L H^2(M) dl_M$  ( $L$  – участок зазора, рис. 1).

В таблице приведены результаты расчетов.

Число уравнений СЛАУ	Погрешность $\xi$ , %	Погрешность $\eta$ , %
СЛАУ (16)		
20	0,51	3,516
40	0,10	0,782
СЛАУ (9)		
20	0,36	12,59
40	0,18	1,930

Из таблицы видно, что метод, основанный на решении СЛАУ (16), обладает преимуществом над методом, основанным на решении СЛАУ (9). Так, при числе уравнений СЛАУ (16), равном 20, достигается приемлемая для проектирования точность, а при решении СЛАУ (9) при том же числе уравнений погрешность расчета поля неприемлемо велика.

### Выводы

1. В статье установлен ранее неизвестный факт, что при решении интегрального уравнения относительно плотности двойного слоя методом коллокаций при кусочно-постоянной аппроксимации граничное условие для вектора напряженности магнитного поля выполняется только в среднем.

2. Предложен новый численный метод, основанный на составлении и решении СЛАУ относительно коэффициентов аппроксимации плотности двойного слоя. В основе вывода СЛАУ лежит закон полного тока. Интегральное уравнение здесь не используется. В данном методе отсутствуют жестко фиксированные точки коллокаций. Как показали численные расчеты, интегрирование по контурам, охватывающим части смежных отрезков разбиения, приводит к увеличению точности по сравнению с интегрированием по контурам, охватывающим каждый отрезок в отдельности.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Манжиров, А. В. Справочник по интегральным уравнениям: методы решения / А. В. Манжиров, А. Д. Полянин. – М. : Изд-во «Факториал Пресс», 2000. – 384 с.
2. Стадник, И. П. Метод СЛАУ расчета статических плоскопараллельных полей в кусочно-однородных средах (вторичные источники: простой слой зарядов; кусочно-постоянная и кусочно-линейная аппроксимация) / И. П. Стадник, Д. М. Филиппов // Техническая электродинамика. – 2007. – № 6. – С. 20–27.
3. Стадник, И. П. Метод СЛАУ расчета статических плоскопараллельных полей в кусочно-однородных средах (вторичные источники: простой слой токов; кусочно-линейная аппроксимация) / И. П. Стадник, Д. М. Филиппов // Техническая электродинамика. – 2008. – № 5. – С. 12–17.
4. Стадник, И. П. Повышение эффективности метода интегральных уравнений расчета магнитоэлектрических полей в кусочно-однородных средах / И. П. Стадник, А. В. Жильцов // Техническая электродинамика. – 2003. – № 2. – С. 3–8.
5. Тозони, О. В. Расчет трехмерных электромагнитных полей / О. В. Тозони, И. Д. Маергойз. – Киев : Техніка, 1974. – 352 с.

## INCREASING OF THE ACCURACY OF CALCULATION OF PLANE-PARALLEL MAGNETIC FIELD IN PIECEWISE-HOMOGENEOUS MEDIUMS BY THE DOUBLE LAYER METHOD

*I.P. Stadnyk, D.M. Filippov*

SLAE for the unknown values of density of double layer at use continuous piecewise-linear approximation is got by application of Ampere's circuital law in the integral form for circuits covering each segment of the boundary of partition of mediums. Application of this SLAE allows to reduce the volume of calculations in comparison with the collocation method of solution of integral equations.

**Key words:** SLAE, integral equation, double layer of charges, collocation method, piecewise-homogeneous medium, magnetostatic field.