

УДК 519.63

ТРЕХМЕРНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ДЛЯ W-МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ГОДУНОВА

© 2008 г. **Е. И. Васильев, А. С. Демин**

(400062 Волгоград, Университетский пр-т, 100, Волгоградский гос. ун-т)

e-mail: *comptech@volsu.ru*

Поступила в редакцию 23.07.2007 г.
Переработанный вариант 26.02.2008 г.

Предлагается модификация метода Годунова повышенной точности для трехмерных нестационарных течений совершенного газа. На примере линейного уравнения переноса конструируется полностью трехмерная позитивная схема второго порядка с вычислением поправок на переменном шаблоне, ориентация которого зависит от знаков коэффициентов уравнения. Доказано свойство позитивности предложенной схемы для линейного скалярного уравнения переноса. Проведено тестирование метода на примере задачи о запуске трехмерного профилированного сопла квадратного сечения. Библ. 11. Фиг. 9

Ключевые слова: трехмерное обобщение W-модификации метода Годунова, разностные схемы повышенной точности, линейные уравнения переноса.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в вычислительной газодинамике широкое распространение получили монотонные явные методы повышенной точности, основанные на существенно нелинейных разностных схемах. Основная идея схем заключается в консервативной поправке потоков через границы ячеек для схемы первого порядка (см. [1]–[9]). Разностная схема Годунова использует для определения числовых потоков решение задачи Римана о распаде разрыва на границах ячеек. Для нее повышение порядка точности схемы можно достигнуть путем аддитивных поправок к потокам [4] либо за счет поправок к исходным аргументам задачи Римана (см. [2], [3], [5]–[9]). Нелинейный характер поправок, а также переменный шаблон их вычисления позволяют обойти известную теорему С.К. Годунова из [10] и совместить второй порядок точности схемы с монотонностью. В [9] для двумерной схемы использовался так называемый W-шаблон. В данной работе предлагается развитие этого метода с использованием аналогичного трехмерного переменного шаблона.

Основная идея для определения поправок, обеспечивающая второй порядок точности схемы, заключается в следующем утверждении. Пусть гиперболическая система уравнений с источниками записана в дивергентном виде

$$\mathbf{w}_t + \mathbf{F}(\mathbf{w})_x + \mathbf{G}(\mathbf{w})_y + \mathbf{H}(\mathbf{w})_z = \Phi(\mathbf{w}),$$

где $\mathbf{w}(x, y, z, t)$ – вектор из m компонент, $\mathbf{F}(\mathbf{w})$, $\mathbf{G}(\mathbf{w})$, $\mathbf{H}(\mathbf{w})$ и $\Phi(\mathbf{w})$ – вектор-функции потоков и источниковых членов. Тогда метод Годунова 1-го порядка (см. [11]), примененный к модифицированному уравнению

$$\mathbf{w}_t + \mathbf{F}(\mathbf{w} + \boldsymbol{\alpha})_x + \mathbf{G}(\mathbf{w} + \boldsymbol{\beta})_y + \mathbf{H}(\mathbf{w} + \boldsymbol{\gamma})_z = \Phi(\mathbf{w}),$$

даст приближенное решение исходного уравнения со вторым порядком точности по пространству и времени, если поправки имеют вид

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\Delta x}{2} \text{sign}(F_w) \mathbf{w}_x + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{w}_t,$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\Delta y}{2} \text{sign}(G_w) \mathbf{w}_y + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{w}_t,$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\Delta z}{2} \text{sign}(H_{\mathbf{w}}) \mathbf{w}_z + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{w}_t,$$

где $F_{\mathbf{w}}$, $G_{\mathbf{w}}$ и $H_{\mathbf{w}}$ – матрицы производных.

Для вычисления поправок удобно заменить в последних формулах производные по времени w_t на пространственные производные с помощью исходного уравнения:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \frac{\Delta x}{2} \text{sign}(F_{\mathbf{w}}) \mathbf{w}_x - \frac{\Delta t}{2} F(\mathbf{w})_x - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{G}(\mathbf{w})_y - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H}(\mathbf{w})_z + \frac{\Delta t}{2} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{w}), \\ \boldsymbol{\beta} &= \frac{\Delta y}{2} \text{sign}(G_{\mathbf{w}}) \mathbf{w}_y - \frac{\Delta t}{2} F(\mathbf{w})_x - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{G}(\mathbf{w})_y - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H}(\mathbf{w})_z + \frac{\Delta t}{2} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{w}), \\ \boldsymbol{\gamma} &= \frac{\Delta z}{2} \text{sign}(H_{\mathbf{w}}) \mathbf{w}_z - \frac{\Delta t}{2} F(\mathbf{w})_x - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{G}(\mathbf{w})_y - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H}(\mathbf{w})_z + \frac{\Delta t}{2} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{w}). \end{aligned} \quad (1)$$

Аппроксимация величин $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ при численном решении осуществлялась нелинейным образом на трехмерном W -шаблоне, ориентация которого зависит от направления скорости потока (собственных значений матриц $F_{\mathbf{w}}$, $G_{\mathbf{w}}$ и $H_{\mathbf{w}}$).

1. АНАЛИЗ СХЕМЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО СКАЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим трехмерное скалярное уравнение переноса с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} + \mu \frac{\partial w}{\partial y} + \eta \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \lambda, \mu, \eta = \text{const}. \quad (1.1)$$

Пусть сетка выбрана равномерной и прямоугольной, причем направление роста индексов ячеек (j, i, k) совпадает с направлением осей координат (x, y, z) . Схема Годунова в случае положительных коэффициентов уравнения (1.1) имеет вид

$$\frac{\bar{w}_{jik} - w_{jik}}{\Delta t} + \lambda \frac{w_{jik} - w_{j-1ik}}{\Delta x} + \mu \frac{w_{jik} - w_{ji-1k}}{\Delta y} + \eta \frac{w_{jik} - w_{jik-1}}{\Delta z} = 0, \quad (1.2)$$

где \bar{w}_{jik} и w_{jik} – значения искомой функции $w(x, y, z)$ в ячейке (j, i, k) в момент времени $t + \Delta t$ и t .

Для более общего случая введем обозначение для индексов, “сдвинутых назад”, а именно j_-, i_-, k_- , и индексов, “сдвинутых вперед” по потоку, а именно j_+, i_+, k_+ :

$$\begin{aligned} j_- &= j - \text{sign}(\lambda), & i_- &= i - \text{sign}(\mu), & k_- &= k - \text{sign}(\eta), \\ j_+ &= j + \text{sign}(\lambda), & i_+ &= i + \text{sign}(\mu), & k_+ &= k + \text{sign}(\eta). \end{aligned}$$

В каждой ячейке с номером (j, i, k) рассмотрим разности против потока вдоль осей x, y и z для $p_{jik}, q_{jik}, r_{jik}$:

$$\begin{aligned} p_{jik} &= w_{jik} - w_{j_-, ik}, \\ q_{jik} &= w_{jik} - w_{j, i_-, k}, \\ r_{jik} &= w_{jik} - w_{j, i, k_-}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В этих обозначениях разностная схема Годунова (1.2) для уравнения (1.1) запишется в виде

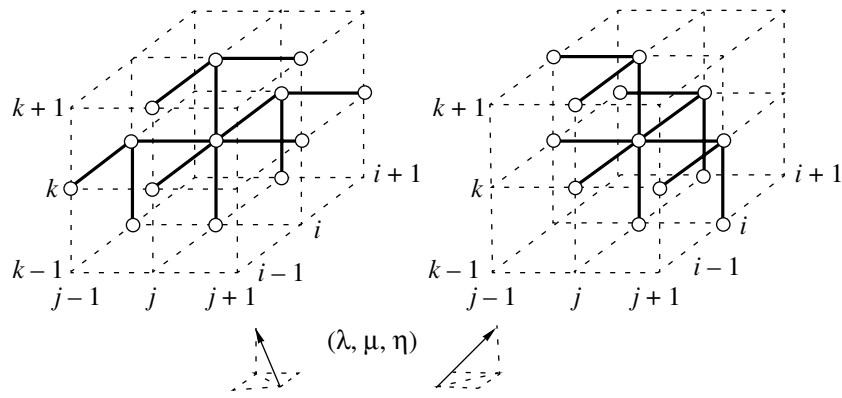
$$\bar{w}_{jik} = w_{jik} - v_x p_{jik} - v_y q_{jik} - v_z r_{jik}, \quad (1.4)$$

где

$$v_x = \frac{\Delta t}{\Delta x} |\lambda|, \quad v_y = \frac{\Delta t}{\Delta y} |\mu|, \quad v_z = \frac{\Delta t}{\Delta z} |\eta|.$$

Схема (1.4) устойчива и позитивна при выполнении следующих условий:

$$v_x \geq 0, \quad v_y \geq 0, \quad v_z \geq 0, \quad v \equiv v_x + v_y + v_z \leq 1, \quad (1.5)$$



Фиг. 1.

где v – сумма чисел Куранта для различных направлений. Монотонность в этом смысле эквивалентна положительной аппроксимации разностной схемы, а условия (1.5) обеспечивают неотрицательность коэффициентов в правой части схемы (1.3), (1.4).

Введем величины, аппроксимирующие выражения в формуле (1) с помощью разности против потока:

$$\begin{aligned} \alpha_{jik} &= (p - v_x p - v_y q - v_z r)_{jik}, \\ \beta_{jik} &= (q - v_x q - v_y p - v_z r)_{jik}, \\ \gamma_{jik} &= (r - v_x r - v_y p - v_y q)_{jik}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Модифицированную схему запишем в виде, аналогичном схеме Годунова (1.4):

$$\bar{w}_{jik} = w_{jik} - v_x \hat{p}_{jik} - v_y \hat{q}_{jik} - v_z \hat{r}_{jik}, \tag{1.7}$$

где разности \hat{p}_{jik} , \hat{q}_{jik} и \hat{r}_{jik} вычисляются аналогично (1.3), но с поправками:

$$\begin{aligned} \hat{p}_{jik} &= (w + \partial^x w)_{jik} - (w + \partial^x w)_{j_{-}ik}, \\ \hat{q}_{jik} &= (w + \partial^y w)_{jik} - (w + \partial^y w)_{ji_{-}k}, \\ \hat{r}_{jik} &= (w + \partial^z w)_{jik} - (w + \partial^z w)_{jik_{-}}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Поправки $\partial^x w_{jik}$, $\partial^y w_{jik}$ и $\partial^z w_{jik}$ определяются как нелинейные средние из пар величин (1.6) для ячейки (j, i, k) и ячейки, находящейся впереди по потоку:

$$\partial^x w_{jik} = \text{mid}(\alpha_{jik}, \alpha_{j_{+}ik}), \quad \partial^y w_{jik} = \text{mid}(\beta_{jik}, \beta_{ji_{+}k}), \quad \partial^z w_{jik} = \text{mid}(\gamma_{jik}, \gamma_{jik_{+}}), \tag{1.9}$$

где $\text{mid}(a, b)$ – некоторая нелинейная функция осреднения a и b .

Отметим, что величины α_{jik} , $\alpha_{j_{+}ik}$, β_{jik} , $\beta_{ji_{+}k}$ и γ_{jik} , $\gamma_{jik_{+}}$ вычисляются на шаблоне, зависящем от знаков λ , μ и η , с ориентацией ветвей против потока. На фиг. 1 изображены два варианта упомянутого шаблона при различных положениях вектора скорости переноса (λ, μ, η) .

Обоснование позитивности схемы (1.7) дает следующая

Теорема. Если функция $\text{mid}(a, b)$ такова, что для любых a, b, c справедливы соотношения

$$|\text{mid}(a, b) - \text{mid}(c, a)| \leq r|a| \tag{1.10}$$

и

$$r = \frac{2}{1 + v}, \tag{1.11}$$

то при условии (1.5) разностная схема (1.6)–(1.9) позитивна.

Доказательство. После подстановки (1.8) в схему (1.7) имеем

$$\bar{w}_{jik} = w_{jik} - v_x(p_{jik} + \partial^x w_{jik} - \partial^x w_{j_{-}ik}) - v_y(q_{jik} + \partial^y w_{jik} - \partial^y w_{ji_{-}k}) - v_z(r_{jik} + \partial^z w_{jik} - \partial^z w_{jik_{-}}).$$

Для разности поправок из (1.9) и (1.10), с учетом того что $\alpha_{jik} = \alpha_{(j_{-})_+ik}$, $\beta_{jik} = \beta_{j(i_{-})_+k}$ и $\gamma_{jik} = \gamma_{ji(k_{-})_+}$, получим

$$|\partial^x w_{jik} - \partial^x w_{j_{-}ik}| \leq r|\alpha_{jik}|, \quad |\partial^y w_{jik} - \partial^y w_{ji_{-}k}| \leq r|\beta_{jik}|, \quad |\partial^z w_{jik} - \partial^z w_{jik_{-}}| \leq r|\gamma_{jik}|.$$

Последние неравенства можно переписать в виде:

$$\partial^x w_{jik} - \partial^x w_{j_{-}ik} = \varepsilon_x r \alpha_{jik}, \quad \partial^y w_{jik} - \partial^y w_{ji_{-}k} = \varepsilon_y r \beta_{jik}, \quad \partial^z w_{jik} - \partial^z w_{jik_{-}} = \varepsilon_z r \gamma_{jik}.$$

где ε_x , ε_y и ε_z – некоторые числа такие, что

$$-1 \leq \varepsilon_x \leq 1, \quad -1 \leq \varepsilon_y \leq 1, \quad -1 \leq \varepsilon_z \leq 1. \quad (1.12)$$

Тогда схему (1.7) можно представить в виде, аналогичном схеме Годунова (1.4):

$$\bar{w}_{jik} = w_{jik} - \hat{v}_x p_{jik} - \hat{v}_y q_{jik} - \hat{v}_z r_{jik},$$

где

$$\hat{v}_x = v_x \left[1 + \frac{1}{2} \varepsilon_x r (1 - v_x) - \frac{1}{2} \varepsilon_y r v_y - \frac{1}{2} \varepsilon_z r v_z \right],$$

$$\hat{v}_y = v_y \left[1 - \frac{1}{2} \varepsilon_x r v_x + \frac{1}{2} \varepsilon_y r (1 - v_y) - \frac{1}{2} \varepsilon_z r v_z \right],$$

$$\hat{v}_z = v_z \left[1 - \frac{1}{2} \varepsilon_x r v_x - \frac{1}{2} \varepsilon_y r v_y + \frac{1}{2} \varepsilon_z r (1 - v_z) \right].$$

Из последних формул с учетом (1.12) получаем следующие оценки:

$$\hat{v}_x \geq v_x \left[1 - \frac{r}{2} (1 - v_x + v_y + v_z) \right],$$

$$\hat{v}_y \geq v_y \left[1 - \frac{r}{2} (1 + v_x - v_y + v_z) \right],$$

$$\hat{v}_z \geq v_z \left[1 - \frac{r}{2} (1 + v_x + v_y - v_z) \right],$$

(1.13)

$$1 - \hat{v}_x - \hat{v}_y - \hat{v}_z \geq (1 - v_x - v_y - v_z) \left(1 - \frac{r}{2} (v_x + v_y + v_z) \right),$$

из которых, используя (1.5) и (1.11), следуют условия, аналогичные условиям (1.5):

$$\hat{v}_x \geq 2v_x \left[\frac{v_x}{1+v} \right] \geq 0, \quad \hat{v}_y \geq 2v_y \left[\frac{v_y}{1+v} \right] \geq 0, \quad \hat{v}_z \geq 2v_z \left[\frac{v_z}{1+v} \right] \geq 0,$$

$$1 - \hat{v}_x - \hat{v}_y - \hat{v}_z \geq (1 - v) \left(\frac{1}{1+v} \right) \geq 0.$$

Следовательно, схема (1.6)–(1.9) является позитивной, как и исходная схема Годунова.

Выбор функции r вида (1.11) для доказательства теоремы не является единственным. Рассмотрим выражения (1.13), полученные в ходе доказательства теоремы, и потребуем, чтобы выполнялись неравенства $\hat{v}_x \geq 0$, $\hat{v}_y \geq 0$, $\hat{v}_z \geq 0$ и $1 - \hat{v}_x - \hat{v}_y - \hat{v}_z \geq 0$. Тогда, выражая r из неравенств, получаем три не поглощающих друг друга неравенства:

$$r \leq r_x \equiv \frac{2}{1 - v_x + v_y + v_z}, \quad r \leq r_y \equiv \frac{2}{1 + v_x - v_y + v_z}, \quad r \leq r_z \equiv \frac{2}{1 + v_x + v_y - v_z}. \quad (1.14)$$

Таким образом, в качестве функции r можно взять

$$r = \min(r_x, r_y, r_z).$$

Это обеспечит выполнение условий (1.14) и расширит диапазон значений r . Обеспечить более мягкие ограничения на r можно, например, за счет рассмотрения векторной функции $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$, где компоненты r_x, r_y и r_z в общем случае различны.

Приведем несколько функций, удовлетворяющих условиям (1.10), (1.11) (см. [9]):

$$\text{mid}(a, b) = \text{mms}(a, b) = \begin{cases} \min(|a|, |b|) \text{sign}(a), & ab \geq 0, \\ 0, & ab < 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

$$\text{mid}(a, b) = \text{mhs}_r(a, b) = \frac{r(|ab| + ab) \text{sign}(a)}{|a + b| + \sqrt{(a + b)^2 - 4abr(2 - r)}}. \quad (1.16)$$

При $r = 1$ последняя функция обращается в $\text{mms}(a, b)$. При $r = 2$ она обращается в функцию “гармонического среднего”, которую для одномерных задач впервые предложено использовать в [4].

Условия (1.10), (1.11) для последних двух функций (1.15), (1.16) выполняются, так как справедливо соотношение

$$|\text{mhs}_r(a, b)| \leq r |\text{mms}(a, b)|.$$

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОПРАВК ДЛЯ ВЕКТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим гиперболическую систему уравнений с тремя пространственными переменными, записанную в недивергентной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + X \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + Y \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + Z \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} = \Phi,$$

где \mathbf{w} – вектор из m компонент, а X, Y и Z – матрицы, зависящие от w . Собственные значения упомянутых матриц действительны, а множество собственных векторов образует базис, т.е. имеет место разложение

$$X = R_X L R_X^{-1}, \quad Y = R_Y M R_Y^{-1}, \quad Z = R_Z N R_Z^{-1},$$

где R_X, R_Y, R_Z – матрицы собственных векторов, а L, M и N – диагональные матрицы собственных значений $(\lambda_n), (\mu_n)$ и $(\eta_n), n = 1, 2, \dots, m$.

Пусть сетка выбрана равномерной и прямоугольной, причем направление роста индексов ячеек (j, i, k) совпадает с направлением осей координат (x, y, z) . Аналогично скалярному случаю введем обозначение для индексов, “сдвинутых назад”, а именно $j_{\bar{n}}, i_{\bar{n}}, k_{\bar{n}}$, и индексов, “сдвинутых вперед” по потоку, а именно $j_{\bar{n}^+}, i_{\bar{n}^+}, k_{\bar{n}^+}$, по отношению к собственному значению λ_n :

$$\begin{aligned} j_{\bar{n}} &= j - \text{sign}(\lambda_n), & i_{\bar{n}} &= i - \text{sign}(\mu_n), & k_{\bar{n}} &= k - \text{sign}(\eta_n), \\ j_{\bar{n}^+} &= j + \text{sign}(\lambda_n), & i_{\bar{n}^+} &= i + \text{sign}(\mu_n), & k_{\bar{n}^+} &= k + \text{sign}(\eta_n). \end{aligned}$$

Рассмотрим для каждой ячейки с номером (j, i, k) векторы характеристических разностей против потока вдоль осей x, y и z : $\mathbf{p}_{jik}, \mathbf{q}_{jik}$ и \mathbf{r}_{jik} ($[\]_n$ – обозначение n -й компоненты вектора):

$$\begin{aligned} [\mathbf{p}_{jik}] &= [R_X^{-1}(\mathbf{w}_{jik} - \mathbf{w}_{j_{\bar{n}}ik})]_n, \\ [\mathbf{q}_{jik}] &= [R_Y^{-1}(\mathbf{w}_{jik} - \mathbf{w}_{ji_{\bar{n}}k})]_n, \\ [\mathbf{r}_{jik}] &= [R_Z^{-1}(\mathbf{w}_{jik} - \mathbf{w}_{jik_{\bar{n}}})]_n, \end{aligned}$$

где \mathbf{w}_{jik} – вектор параметров в ячейке (j, i, k) в момент t .

Введем величины, которые с точностью до матричного множителя аппроксимируют выражения (1) с использованием разностей против потока:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_{jik} &= \mathbf{p}_{jik} - \frac{\Delta t}{\Delta x} |L| \mathbf{p}_{jik} - \frac{\Delta t}{\Delta y} R_X^{-1} R_Y |M| \mathbf{q}_{jik} - \frac{\Delta t}{\Delta z} R_X^{-1} R_Z |N| \mathbf{r}_{jik} + \Delta t R_X^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{jik}, \\
\boldsymbol{\beta}_{jik} &= \mathbf{q}_{jik} - \frac{\Delta t}{\Delta y} |M| \mathbf{q}_{jik} - \frac{\Delta t}{\Delta x} R_Y^{-1} R_X |L| \mathbf{p}_{jik} - \frac{\Delta t}{\Delta z} R_Y^{-1} R_Z |N| \mathbf{r}_{jik} + \Delta t R_Y^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{jik}, \\
\boldsymbol{\gamma}_{jik} &= \mathbf{r}_{jik} - \frac{\Delta t}{\Delta z} |N| \mathbf{r}_{jik} - \frac{\Delta t}{\Delta x} R_Z^{-1} R_X |L| \mathbf{p}_{jik} - \frac{\Delta t}{\Delta y} R_Z^{-1} R_Y |M| \mathbf{q}_{jik} + \Delta t R_Z^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{jik}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

И окончательно для каждой ячейки находим три вектора поправок $\partial^x \mathbf{w}_{jik}$, $\partial^y \mathbf{w}_{jik}$, $\partial^z \mathbf{w}_{jik}$, как нелинейные средние из пар величин (2.1) для ячейки (j, i, k) и ячейки, находящейся впереди по потоку:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_{jik}^+ &= [\boldsymbol{\alpha}_{j_{\tilde{n}k}}^+]_n, \quad \boldsymbol{\beta}_{jik}^+ = [\boldsymbol{\beta}_{j_{\tilde{n}k}}^+]_n, \quad \boldsymbol{\gamma}_{jik}^+ = [\boldsymbol{\gamma}_{j_{\tilde{n}k}}^+]_n, \\
\partial^x \mathbf{w}_{jik} &= \frac{1}{2} R_X \text{mid}(\boldsymbol{\alpha}_{jik}, \boldsymbol{\alpha}_{jik}^+), \\
\partial^y \mathbf{w}_{jik} &= \frac{1}{2} R_Y \text{mid}(\boldsymbol{\beta}_{jik}, \boldsymbol{\beta}_{jik}^+), \\
\partial^z \mathbf{w}_{jik} &= \frac{1}{2} R_Z \text{mid}(\boldsymbol{\gamma}_{jik}, \boldsymbol{\gamma}_{jik}^+).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Нелинейная функция осреднения $\text{mid}(a, b)$ для векторных величин применяется покомпонентно. Значения коэффициентов матриц вычисляются по параметрам той ячейки, в которой производится вычисление поправок. Поправки постоянны для данной ячейки и добавляются к основным параметрам перед вычислением потоков через соответствующие границы ячейки. В методе Годунова для вычисления потоков используется решение задачи Римана.

3. СХЕМА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОДИНАМИКИ

Дивергентная форма системы дифференциальных уравнений, описывающих трехмерное нестационарное течение невязкого совершенного газа, имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{U})}{\partial z} = 0, \tag{3.1}$$

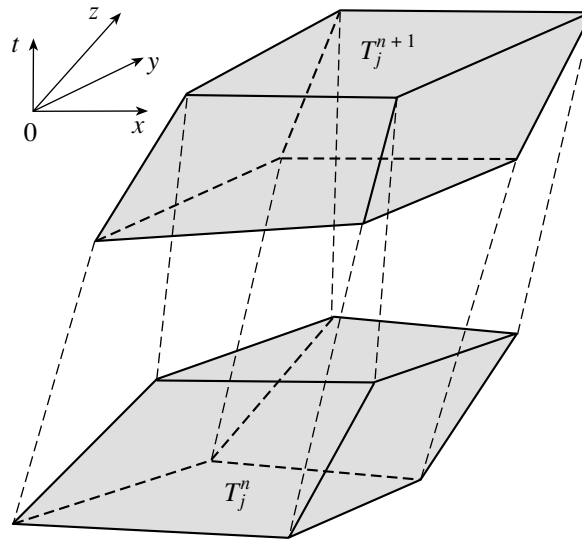
$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (e + p)u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (e + p)v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (e + p)w \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где ρ и p – плотность и давление соответственно, u, v, w – компоненты вектора скорости в трехмерном пространстве, $e = p/(\gamma - 1) + 0.5\rho(u^2 + v^2 + w^2)$ – полная энергия единицы объема, γ – показатель адиабаты. Вектор-функции $\mathbf{F}(\mathbf{U})$, $\mathbf{G}(\mathbf{U})$ и $\mathbf{H}(\mathbf{U})$ называются функциями потоков.

Рассмотрим отдельную подвижную ячейку T_j моменты времени t_n и $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ как объемное тело V_j в четырехмерном пространстве $Oxuzt$. Нижнее и верхнее основания T_j^n и T_j^{n+1} четырехмерного тела представляют собой ячейку T_j в различные моменты времени. Считаем, что при своем движении ячейка остается шестигранником, причем вершины в течение шага Δt двигаются с постоянной скоростью (фиг. 2).

Интегральный аналог уравнений (3.1), примененный к этому телу, можно записать в виде:

$$\oint_{\partial V_j} (\mathbf{U} m_t + \mathbf{F} m_x + \mathbf{G} m_y + \mathbf{H} m_z) dV = 0. \tag{3.3}$$



Фиг. 2.

В левой части равенства (3.3) стоит интеграл по поверхности четырехмерного тела $\partial V_j = T_j^n \cup T_j^{n+1} \cup (\cup_k T_{j_k})$, где $T_{j_k}, k = 0, \dots, 5$ – боковые трехмерные грани, (m_t, m_x, m_y, m_z) – компоненты внешней нормали m к поверхности этого тела. С учетом того что T_j^n и T_j^{n+1} параллельны гиперплоскости $Oxyz$, (3.3) можно записать в виде:

$$\int_{T_j^n} \mathbf{U} m_t ds + \int_{T_j^{n+1}} \mathbf{U} m_t ds + \int_{\cup_k T_{j_k}} (\mathbf{U} m_t + \mathbf{F} m_x + \mathbf{G} m_y + \mathbf{H} m_z) dV = 0.$$

Заменяя на каждой из граней подынтегральные величины на постоянные (например, считая их равными значениям в центрах граней, т.е. в точках пересечения средних сечений), можно записать следующее приближенное равенство:

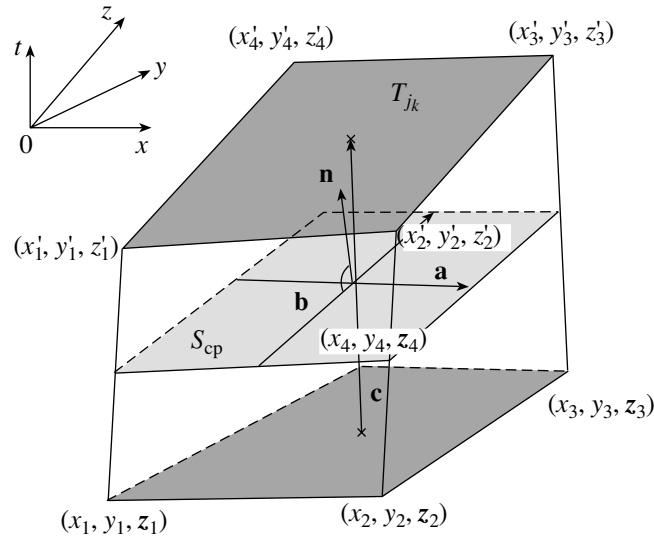
$$\mathbf{U}_j^{n+1} V_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n V_j^n - \sum_k \mathbf{Q}_{j_k}, \tag{3.4}$$

где

$$\mathbf{Q}_{j_k} = \mathbf{U}_{j_k} \int_{T_{j_k}} m_t dV + \mathbf{F}_{j_k} \int_{T_{j_k}} m_x dV + \mathbf{G}_{j_k} \int_{T_{j_k}} m_y dV + \mathbf{H}_{j_k} \int_{T_{j_k}} m_z dV. \tag{3.5}$$

В (3.4) величины V_j^n и V_j^{n+1} – объемы верхнего и нижнего оснований. Величины \mathbf{Q}_{j_k} представляют собой векторы потоков через j_k -грань j -й ячейки за промежуток времени Δt . Интегралы в (3.5) представляют собой алгебраические значения (то есть с учетом знака) объемов проекций k -го шестигранника на соответствующие подпространства $Oxyz, Oxyt, Oxzt$ и $Oxyt$. Далее индекс j_k временно опускаем для краткости.

На фиг. 3 изображена подвижная грань ячейки в моменты времени t и $t + \Delta t$ (затененные четырехугольники). S_{cp} – среднее сечение шестигранника, S – площадь среднего сечения, $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ – единичный вектор нормали к среднему сечению, направленный вдоль проекции вектора m на гиперплоскость $t = t_n + \Delta t/2$, Ω – объем проекции шестигранника на гиперплоскость $Oxyz$, d – осредненная скорость движения грани ячейки.



Фиг. 3.

Через векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} , которые соединяют середины противоположных сторон трехмерного тела, образованного при перемещении подвижной грани ячейки, можно выразить все ранее упомянутые параметры:

$$S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|, \quad (n_x, n_y, n_z) = \frac{1}{S}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad \Omega = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad d = -\frac{\Omega}{S\Delta t}, \quad (3.6)$$

а также выразить интегралы

$$\int_{T_{jk}} m_t ds = \Omega = -S\Delta t d, \quad \int_{T_{jk}} m_x dV = S n_x \Delta t, \quad \int_{T_{jk}} m_y dV = S n_y \Delta t, \quad \int_{T_{jk}} m_z dV = S n_z \Delta t.$$

После подстановки в (3.5) получим

$$\mathbf{Q}_{j_k} = S_{j_k} \Delta t (\mathbf{F} n_x + \mathbf{G} n_y + \mathbf{H} n_z - \mathbf{U} d)_{j_k}.$$

С учетом (3.2) последнее выражение можно записать более подробно:

$$Q_{j_k} = S_{j_k} \Delta t \begin{pmatrix} \rho(u_n - d) \\ \rho u(u_n - d) + n_x p \\ \rho v(u_n - d) + n_y p \\ \rho w(u_n - d) + n_z p \\ \rho e(u_n - d) + u_n p \end{pmatrix}_{j_k}, \quad u_n = n_x u + n_y v + n_z w. \quad (3.7)$$

Для вычисления потоков по формулам (3.6), (3.7) необходимо указать способ определения величин $(\rho, p, u, v, w)_{j_k}$ на каждой k -й грани j -й ячейки. В методах типа Годунова эти величины определяются как решение вспомогательной задачи о распаде разрыва (задача Римана) на грани с нормалью \mathbf{n} и движущегося со скоростью d . Быстрый алгоритм решения задачи о распаде разрыва изложен в [11]. В методе Годунова 1-го порядка в качестве исходных данных для задачи Римана используются параметры в соседних ячейках с временного слоя $t = t_n$. В предлагаемой схеме к этим параметрам перед решением задачи Римана добавляются корректирующие поправки, которые обеспечивают повышение порядка метода до 2-го по пространству и времени.

Рассмотрим более подробно алгоритм вычисления поправок для уравнений движения совершенного газа. С целью экономии вычислений используем недивергентную форму уравнений Эйлера, которые в декартовых координатах имеют вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + X \frac{\partial w}{\partial x} + Y \frac{\partial w}{\partial y} + Z \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ p \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} u & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & \gamma p & 0 & 0 \\ 0 & \rho^{-1} & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & \gamma p & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & \rho^{-1} & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & 0 & \rho \\ 0 & w & 0 & 0 & \gamma p \\ 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 & w \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Система уравнений (3.8) используется при вычислении поправок по формулам (2.1)–(2.2).

Процедура вычисления поправок, описанная в разд. 2, не использует ортогональности сетки или координат (а только равномерность) и не изменится, если под x , y и z подразумеваются криволинейные координаты при условии, что сетка, построенная из координатных линий, является равномерной именно в этих криволинейных координатах.

В изначальном уравнении (3.8) при переходе в криволинейные координаты (ξ, η, ζ) , которые связаны с сеткой, произойдет преобразование матриц системы уравнений (3.9) и соответствующее этому изменение в процедуре вычисления поправок.

Пусть у нас есть некоторая криволинейная неравномерная и неортогональная подвижная сетка с четырехугольными ячейками. Обозначим через (ξ, η, ζ) , криволинейные координаты, в которых сетка неподвижна, равномерна и направление роста ξ , η и ζ совпадает с направлением роста индексов ячеек. Координатными линиями этой криволинейной системы координат являются сеточные линии, образующие сетку. Предположим наличие дифференцируемой зависимости

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta, t), \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta, t), \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta, t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Введем единичные векторы $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ и $\boldsymbol{\gamma} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$, ортогональные координатным поверхностям $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ и $\zeta = \text{const}$ соответственно, и вектор скорости \mathbf{d} перемещения криволинейной системы по отношению к неподвижным декартовым координатам:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{(y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta)^2 + (z_\eta x_\zeta - x_\eta z_\zeta)^2 + (x_\eta y_\zeta - y_\eta x_\zeta)^2}, \\ \beta &= \sqrt{(z_\xi y_\zeta - y_\xi z_\zeta)^2 + (x_\xi z_\zeta - z_\xi x_\zeta)^2 + (y_\xi x_\zeta - x_\xi y_\zeta)^2}, \\ \gamma &= \sqrt{(y_\xi z_\eta - z_\xi y_\eta)^2 + (z_\xi x_\eta - x_\xi z_\eta)^2 + (x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta)^2}. \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta \\ z_\eta x_\zeta - x_\eta z_\zeta \\ x_\eta y_\zeta - y_\eta x_\zeta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} z_\xi y_\zeta - y_\xi z_\zeta \\ x_\xi z_\zeta - z_\xi x_\zeta \\ y_\xi x_\zeta - x_\xi y_\zeta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} y_\xi z_\eta - z_\xi y_\eta \\ z_\xi x_\eta - x_\xi z_\eta \\ x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix}.$$

С учетом приведенных выше обозначений уравнение (3.8) преобразуем к виду:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi} + B \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta} + C \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \zeta} = 0,$$

где

$$A = \frac{\alpha}{J} (\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{d}) E),$$

$$B = \frac{\beta}{J}(\beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z - (\beta \cdot \mathbf{d})E),$$

$$C = \frac{\gamma}{J}(\gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z - (\gamma \cdot \mathbf{d})E)$$

$$\text{и } J = \begin{vmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{vmatrix} - \text{якобиан преобразования.}$$

В разложении матриц A, B, C

$$A = R_A \Lambda_A R_A^{-1}, \quad B = R_B \Lambda_B R_B^{-1}, \quad C = R_C \Lambda_C R_C^{-1}$$

матрицы собственных векторов и собственных значений устроены схожим образом:

$$R_N = \begin{bmatrix} 1 & n_1 & n_2 & n_3 & 1 \\ c^2 & 0 & 0 & 0 & c^2 \\ -n_1 c/\rho & 0 & -n_3 & n_2 & n_1 c/\rho \\ -n_2 c/\rho & n_3 & 0 & -n_1 & n_2 c/\rho \\ -n_3 c/\rho & -n_2 & n_1 & 0 & n_3 c/\rho \end{bmatrix},$$

$$R_N^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/(2c^2) & -n_1 \rho/(2c) & -n_2 \rho/(2c) & -n_3 \rho/(2c) \\ n_1 & -n_1 c/\rho & 0 & n_3 & -n_2 \\ n_2 & -n_2 c/\rho & -n_3 & 0 & n_1 \\ n_3 & -n_3 c/\rho & n_2 & -n_1 & 0 \\ 0 & 1/(2c^2) & n_1 \rho/(2c) & n_2 \rho/(2c) & n_3 \rho/(2c) \end{bmatrix},$$

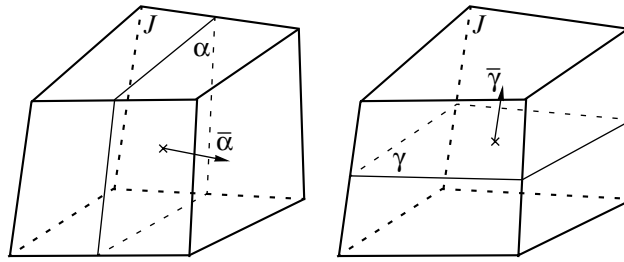
$$\Lambda_N = \begin{bmatrix} \mathbf{n}(\mathbf{q} - \mathbf{d}) - c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{n}(\mathbf{q} - \mathbf{d}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{n}(\mathbf{q} - \mathbf{d}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{n}(\mathbf{q} - \mathbf{d}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{n}(\mathbf{q} - \mathbf{d}) + c \end{bmatrix}.$$

Здесь индекс N принимает значение одного из символов (A, B, C), а вектор $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, соответственно принимает значение α, β или γ . Вектор $\mathbf{q} = (u, v, w)^T$ – вектор скорости газа, c – скорость звука в газе ($c = \sqrt{\gamma p/\rho}$).

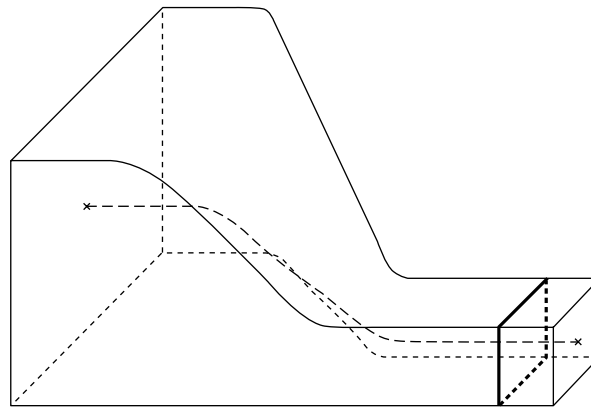
Структура произведений матриц $R_A^{-1} R_B, R_B^{-1} R_A, R_A^{-1} R_C, R_C^{-1} R_A, R_B^{-1} R_C$ и $R_C^{-1} R_B$, входящих в формулы для поправок, довольно проста. Так, например, имеем

$$R_A^{-1} R_B = P - Q, \quad R_B^{-1} R_A = P + Q,$$

$$P = \begin{bmatrix} (1+s)/2 & 0 & 0 & 0 & (1-s)/2 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & 0 \\ (1-s)/2 & 0 & 0 & 0 & (1+s)/2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & \rho v_{23}/(2c) & -\rho v_{13}/(2c) & \rho v_{12}/(2c) & 0 \\ -c v_{23}/\rho & 0 & -v_{12} & -v_{13} & c v_{23}/\rho \\ c v_{13}/\rho & v_{12} & 0 & -v_{23} & -c v_{13}/\rho \\ -c v_{12}/\rho & v_{13} & v_{23} & 0 & c v_{12}/\rho \\ 0 & -\rho v_{23}/(2c) & \rho v_{13}/(2c) & -\rho v_{12}/(2c) & 0 \end{bmatrix},$$



Фиг. 4.



Фиг. 5.

где

$$\begin{aligned} s &= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3, \\ v_{12} &= \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1, \quad v_{13} = \alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1, \quad v_{23} = \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

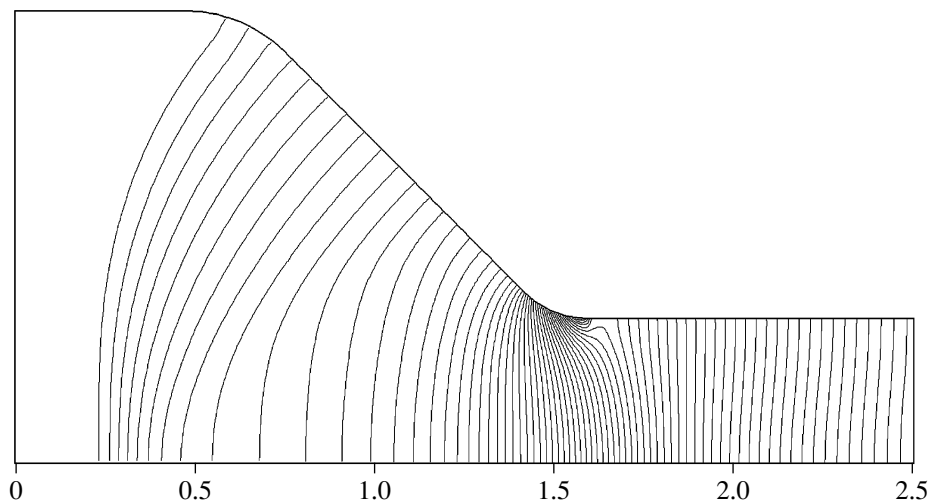
Для получения произведений $R_B^{-1} R_C$ и $R_C^{-1} R_B$ достаточно в выражениях (3.11) заменить α на β , а β на γ .

Для практических вычислений удобно принять, что в криволинейных координатах (ξ, η, ζ) узлы сетки имеют целочисленные координаты. Это правомерно, так как преобразование (3.10) не единственно и определяется с точностью до масштаба измерений вдоль (ξ, η, ζ) . Тогда, переходя к дискретному аналогу ячейки как шестиграннику (см. фиг. 4), получим, что α , β и γ – единичные векторы, перпендикулярные к средним сечениям ячейки, α , β и γ – площади средних сечений трехмерной ячейки, J – объем ячейки.

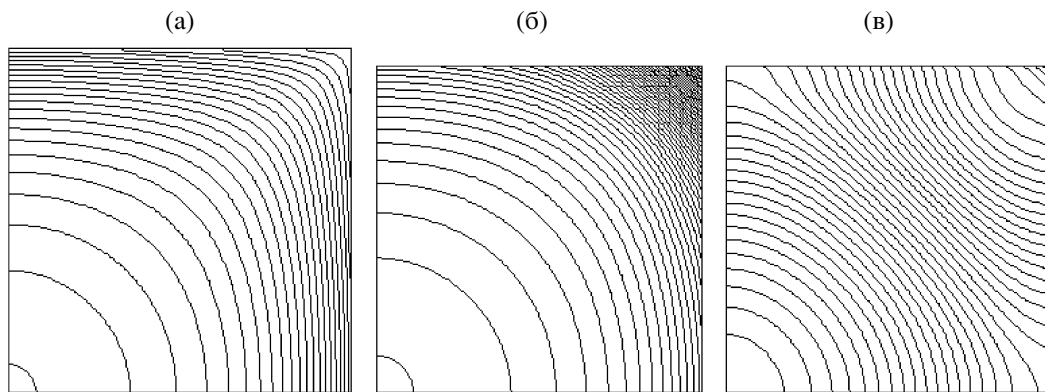
4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Работоспособность метода рассмотрим на примере задачи о формировании течения в профилированном трехмерном канале в режиме трубы Людвига, т.е. когда диафрагма, обеспечивающая начальный перепад давления, располагается около выходного сечения канала. Геометрическая конфигурация канала изображена на фиг. 5. Рассматриваемая область канала имеет длину $L = 2.5$, диафрагма, обозначенная и отмеченная на графике жирной линией, располагается на расстоянии $0.1L$ от выходного сечения и обеспечивает начальный перепад давления, равный 20. Температура по разные стороны от диафрагмы одинаковая.

Так как наличие скачков снижает порядок точности любой схемы до первого, то тестирование свойств аппроксимации схем более высокого порядка необходимо проводить на гладком решении. По этой причине в рассматриваемой геометрии сопла участок расширения был заменен параллельным каналом постоянного сечения, для того чтобы устранить образование вторичных скачков на этом участке.



Фиг. 6.

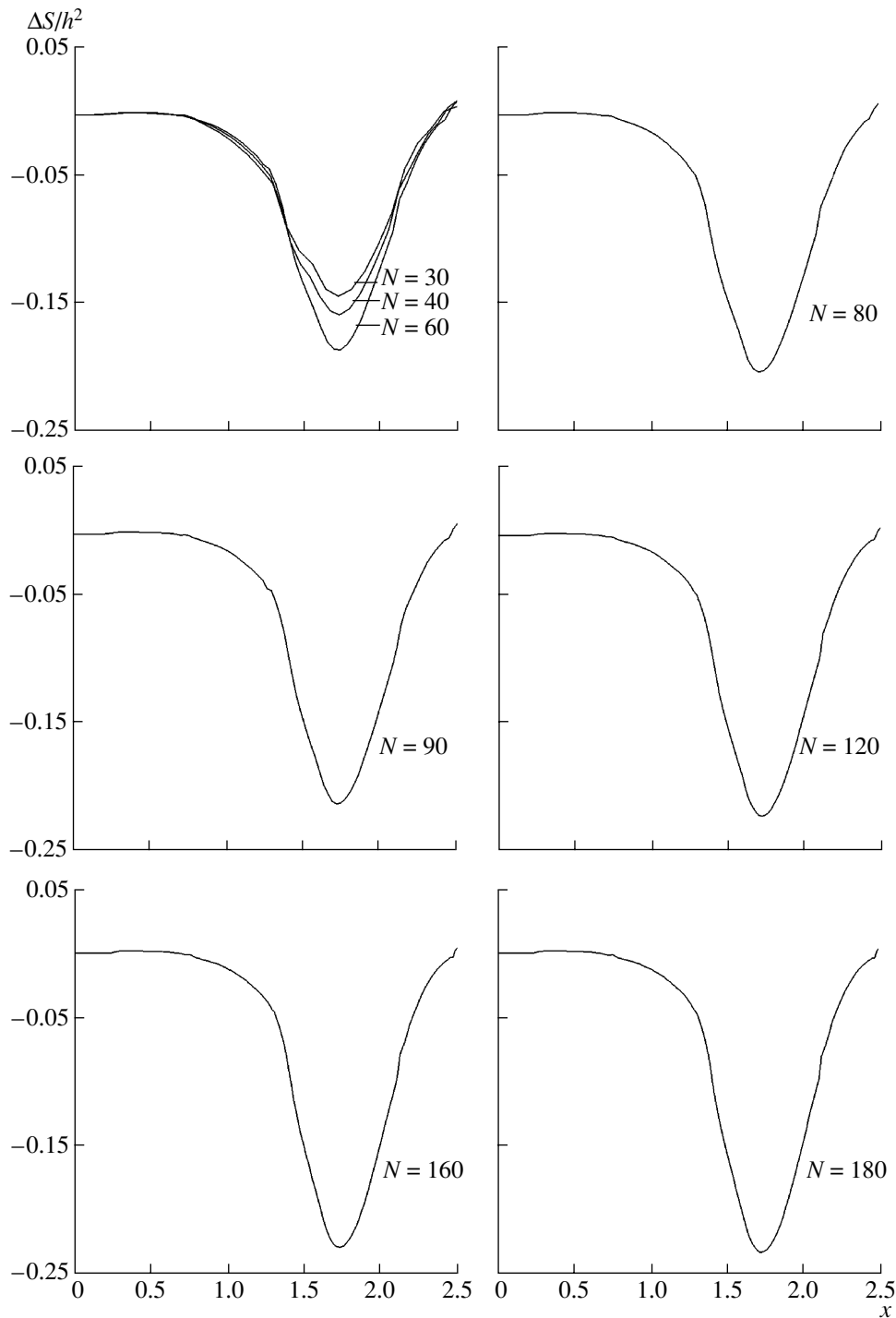


Фиг. 7.

В начальный момент времени газ по обе стороны диафрагмы покоится. После мгновенного разрыва диафрагмы образуется ударная волна и контактный разрыв, которые распространяются вправо и достаточно быстро выносятся из канала. Влево внутрь трехмерного канала распространяется нестационарная волна разрежения, за счет которой осуществляется запуск сопла. В расчетах на стенках канала использовалось условие непротекания.

На фиг. 6 изображены изолинии плотности в плоскости симметрии канала на момент времени $t = 2$ после разрыва диафрагмы. К этому моменту времени волна разрежения прошла переходной участок между широким и узким каналом. Около стенки на входе в узкий параллельный канал наблюдаются повышенные градиенты плотности. Влияние трехмерных эффектов в этой области можно проследить по фиг. 7, где на тот же момент времени изображены изолинии плотности в трех поперечных сечениях канала с координатами $x = 1.5$ (фиг. 7а), $x = 1.6$ (фиг. 7б) и $x = 1.7$ (фиг. 7в) с одинаковым шагом Δr . Среднее сечение $x = 1.6$ соответствует точке сопряжения, т.е. началу параллельного участка. Хорошо видно, что в этом сечении градиенты в угловой области на стыке двух стенок в несколько раз больше, чем градиенты в плоскости симметрии, что говорит о ярко выраженном трехмерном характере течения. Вправо по потоку неоднородность течения быстро уменьшается, в сечении $x = 1.7$ высокие градиенты отсутствуют.

На данный момент времени течение внутри канала непрерывно и энтропия теоретически должна быть равна начальному значению, т.е. величина $S = p/\rho^\gamma$ должна быть равна начальному $S_0 = p_0/\rho_0^\gamma$. Этот факт можно использовать для анализа точности метода путем сравнения численного и теоретического значения энтропии.

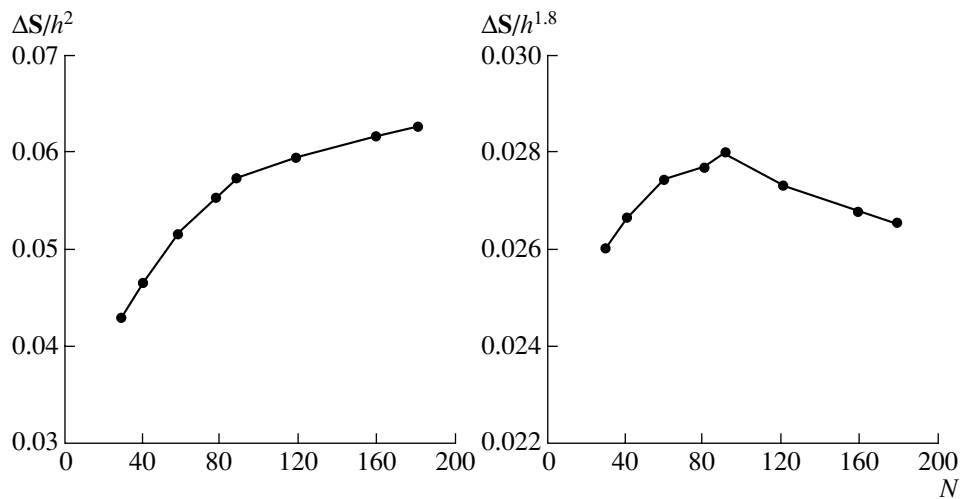


Фиг. 8.

В расчетах использовалась неподвижная сетка, включающая N ячеек по длине сопла и $N/2$ по ширине и высоте. На фиг. 8 для различных значений N от 30 до 180 изображено распределение ошибки $\Delta S/h^2$ вдоль средней линии в момент $t = 2$.

Ошибка в энтропии $\Delta S = (S - S_0)/S_0$ отнесена к квадрату горизонтального шага сетки $h = L/N$. Хорошо видно, что, начиная с $N = 90$, поведение кривых меняется незначительно. Это означает, что ошибка в энтропии $\Delta S \approx Ch^2$, где C не зависит от N .

Результаты фиг. 8 объединены в один график на фиг. 9а, где представлена зависимость нормированной средней ошибки в энтропии от числа ячеек. Видно, что при $N > 90$ рост ошибки за-



Фиг. 9.

медляется. На фиг. 9б изображена интегральная нормированная ошибка в энтропии, нормированная на $h^{1.8}$. Из сравнения кривых на фиг. 9 можно сделать вывод, что оценка порядка точности метода по этим результатам лежит в промежутке от 1.8 до 2.

При изменении h пропорционально изменяется и шаг по времени Δt . Следовательно, учитывая существенную нестационарность течения, близкий ко второму порядку точности имеет место не только по пространству, но и по времени.

В заключение отметим вычислительную эффективность предложенной схемы, которая связана с двумя основными моментами:

- 1) отсутствие расщепления по пространственным координатам значительно снижает суммарный объем пересылаемых данных при параллельных расчетах задач на нескольких компьютерах;
- 2) использование неконсервативной формы уравнений для вычисления поправок приводит к матрицам простой структуры с большим количеством нулевых элементов, что позволяет сделать довольно экономичный алгоритм вычисления поправок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
2. Колган В.П. Конечно-разностная схема для расчета разрывных решений нестационарной газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ. 1975. Т. 6. № 1. С. 9–14.
3. van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. P. 101–136.
4. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. P. 357–393.
5. Копчёнов В.И. Крайко А.Н. Монотонная разностная схема второго порядка для гиперболических систем с двумя независимыми переменными // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т. 23. № 2. С. 848–859.
6. Тупляева Н.И. Обобщение модифицированной схемы С.К. Годунова на произвольные нерегулярные сетки // Уч. зап. ЦАГИ. 1986. Т. 17. № 2. С. 18–26.
7. Родионов А.В. Повышение порядка аппроксимации схемы С.К. Годунова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 12. С. 1853–1860.
8. Collela P. Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1990. V. 87. P. 171–200.
9. Васильев Е.И. W-модификация метода С.К. Годунова и ее применение для двумерных нестационарных течений запыленного газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 1. С. 122–135.
10. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47. С. 271–306.
11. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.