

К ТЕОРИИ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ ПЕРЕМЕННОГО ТИПА<sup>1</sup>(Сибирский математический журнал,  
Том 53 (2012), Номер 6, с. 1321-1337)**А.Н. Кондрашов****Аннотация.** Объектом изучения работы является уравнение

$$A(z)f_z(z) + B(z)f_{\bar{z}}(z) = 0.$$

Изучаются взаимосвязи между решениями этого уравнения и решениями подходящего классического уравнения Бельтрами.

**Ключевые слова:** вырождающееся уравнение Бельтрами, уравнение Бельтрами переменного типа, складки.**§ 1. Введение**Пусть в односвязной области  $D \subset \mathbb{C}$  задано дифференциальное уравнение

$$A(z)f_z(z) + B(z)f_{\bar{z}}(z) = 0, \quad (z = x_1 + ix_2 \in D), \quad (1)$$

где  $A(z)$ ,  $B(z)$  ( $|A(z)| \neq |B(z)|$  п. в. в  $D$ ) — конечные измеримые комплекснозначные функции. В случае  $A = \mu$ ,  $B = -1$  уравнением (1) является *уравнение Бельтрами* (см. [1, гл. 2])

$$f_{\bar{z}}(z) = \mu(z)f_z(z), \quad (2)$$

имеющее при условии

$$\operatorname{ess\,sup}_{D'} |\mu(z)| < 1 \text{ во всякой подобласти } D' \Subset D,$$

гомеоморфное решение  $w = f(z)$ , принадлежащее классу  $W_{\operatorname{loc}}^{1,2}$  вместе с обратным. Это решение единственно с точностью до суперпозиции с конформным отображением.В дальнейшем *решением* уравнения (1) будем называть непрерывную функцию  $f(z) \in W_{\operatorname{loc}}^{1,2}(D)$ , удовлетворяющую ему п. в. в  $D$ .Напомним [2, с. 7], что коэффициент  $\mu(z) = f_{\bar{z}}(z)/f_z(z)$  называется *комплексной дилатацией* отображения  $f(z) \in W_{\operatorname{loc}}^{1,2}(D)$ . Его задание эквивалентно заданию п. в. в  $D$  поля распределения характеристик Лаврентьева  $(p(z), \theta(z))$  (см. [3]). Отображение  $w = f(z)$ , первая характеристика которого п. в. в  $D$  удовлетворяет условию

$$p(z) \leq Q \equiv \operatorname{const}, \quad (3)$$

называется *Q-квазиконформным*. Если условие (3) выполняется в  $D$  локально (т. е. со своим  $Q = Q(D')$  для всякой области  $D' \Subset D$ ), то отображение называется *локально квазиконформным*. Условие  $\operatorname{ess\,sup}_D |\mu(z)| < 1$  ( $\operatorname{ess\,sup}_{D'} |\mu(z)| < 1$  для всякой области  $D' \Subset D$ ) эквивалентно условию квазиконформности (локальной квазиконформности).<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 11-01-97021-р\_поволжье\_а и гранта ФМИТ ВолГУ.

Уравнение Бельтрами с  $|\mu(z)| < 1$  п. в. в  $D$  будем в дальнейшем называть *классическим*. Случаи  $|\mu(z)| < 1$  п. в. в  $D$  и  $|\mu(z)| > 1$  п. в. в  $D$  отличаются тем, что в первом случае гомеоморфные отображения не меняют ориентацию, а во втором меняют. Различие здесь лишь формальное. Интерес представляет ситуация, когда одновременно существуют подобласти  $D$ , в которых п. в. выполнено  $|\mu(z)| < 1$  и подобласти  $D$ , в которых п. в.  $|\mu(z)| > 1$ . В этом случае говорится, что уравнение Бельтрами имеет *переменный* тип. Его решения описывают отображения со складками, сборками и т.п. Задача исследования таких уравнений была поставлена Л.И. Волковыским [4], а ряд успехов в этом направлении был сделан в работах [5, 6]. Следует отметить, что уравнение (1) впервые рассматривалось в работе [5].

Пусть  $E \subset D$  – замкнутое относительно  $D$  множество с мерой  $\text{mes}_2 E = 0$ . Если непрерывная в  $D$  функция  $f(z)$  является решением уравнения (1) в  $D \setminus E$ , то функцию  $f(z)$  будем называть *решением с особенностью  $E$*  данного уравнения<sup>2</sup>.

Наличие особенностей у решений характерно для уравнений (1) *вырождающихся* на некотором множестве  $E$ , т. е. таком  $E$ , что

$$\text{ess inf}_{B_r(z) \cap D} ||A(z)| - |B(z)|| = 0$$

для всякого  $r > 0$ , где  $B_r(z)$  — круг с центром  $z \in E$ . При этом в качестве  $E$  часто выступает *множество смены типа* уравнения (1), т. е. множество раздела между  $\{z : z \in D, |A(z)| < |B(z)|\}$  и  $\{z : z \in D, |A(z)| > |B(z)|\}$ .

ПРИМЕР 1. Функция  $\mathcal{B}(z) = x_1 + i|x_2| \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{C})$  есть решение уравнения (1) с коэффициентами

$$A(z) = \begin{cases} 0, & \text{Im } z > 0, \\ 1, & \text{Im } z \leq 0, \end{cases} \quad B(z) = \begin{cases} 1, & \text{Im } z > 0, \\ 0, & \text{Im } z \leq 0. \end{cases}$$

Уравнение невырожденное. Функцию  $\mathcal{B}(z)$ , следуя Ю.Ю. Трохимчуку [7, гл. 3, §3], будем в дальнейшем называть *функцией Бора*.

ПРИМЕР 2. Функция  $f(z) = x_1 + (ix_2^2)/2 \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{C})$  есть решение уравнения

$$(x_2 - 1)f_z + (x_2 + 1)f_{\bar{z}}(z) = 0.$$

Уравнение вырожденное на прямой  $E = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

ПРИМЕР 3. Функция  $f(z) = x_1 + 2i\sqrt{|x_2|} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$  есть решение с особенностью  $E = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  уравнения

$$(\text{sgn } x_2 - \sqrt{|x_2|})f_z + (\text{sgn } x_2 + \sqrt{|x_2|})f_{\bar{z}}(z) = 0.$$

Уравнение вырожденное на прямой  $E = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

## 2. Ассоциированное уравнение

Уравнению (1) будем ставить в соответствие классическое уравнение Бельтрами с комплексной дилатацией

$$\mu^*(z) = \begin{cases} -A(z)/B(z) & \text{при } |A(z)| \leq |B(z)|, \\ -\overline{B(z)}/\overline{A(z)} & \text{при } |A(z)| > |B(z)|. \end{cases} \quad (4)$$

<sup>2</sup>При этом не известна принадлежность  $f \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$ .

Это уравнение называем в дальнейшем *уравнением, ассоциированным с уравнением* (1).

Отметим, что для уравнения Бельтрами (2)

$$\mu^*(z) = \begin{cases} \mu(z) & \text{при } |\mu(z)| \leq 1, \\ 1/\overline{\mu(z)} & \text{при } |\mu(z)| > 1, \end{cases}$$

и, значит, в классическом случае  $\mu(z) = \mu^*(z)$ .

Главные цели настоящей работы состоят в изучении свойств решений ассоциированного уравнения и выявлении взаимосвязей между ними и решениями первоначального уравнения (1). Важность такой связи была впервые отмечена в работе [8].

Пусть имеется функция  $f(z) : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Если существует функция  $K(z) \in W^{1,2}(D)$ , такая, что

$$f(z) \leq K(z),$$

то функция  $f(z)$  называется  $W^{1,2}$ -*мажорируемой* в  $D$ . Если  $f(z)$  является  $W^{1,2}$ -*мажорируемой* во всякой подобласти  $D' \Subset D$ , то говорят, что  $f(z)$  является *локально*  $W^{1,2}$ -*мажорируемой* в  $D$ . Для краткости вместо «локально  $W^{1,2}$ -мажорируема» всюду ниже будем писать « $W_{\text{loc}}^{1,2}$ -мажорируема».

Если функция  $f$  абсолютно непрерывна внутри почти всех сечений<sup>3</sup> области  $D$  прямыми параллельными осям координат, то будем говорить, что  $f$  принадлежит классу  $ACL$  в  $D$ , кратко записывая это в виде « $f \in ACL$  в  $D$ ». В дальнейшем связь между функциями классов Соболева и функциями класса  $ACL$  предполагается известной (см., например, [9, с. 14]).

Отправной точкой настоящей работы является следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Предположим, что измеримые функции  $A(z), B(z)$ , ( $|A(z)| + |B(z)| > 0$ ), таковы, что функция<sup>4</sup>*

$$P_{(A,B)}(z) = \frac{|A(z)| + |B(z)|}{||A(z)| - |B(z)||}$$

*является  $W_{\text{loc}}^{1,2}$ -мажорируемой в  $D$ .*

*Тогда существует гомеоморфное решение  $w = f(z) : D \rightarrow f(D) \subset \mathbb{C}$  уравнения, ассоциированного с (1), причем  $f^{-1}(w) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(f(D))$ . Решение единственно с точностью до суперпозиции с конформным отображением, т. е. любое гомеоморфное решение  $f_1(z)$  этого уравнения имеет вид*

$$f_1(z) = \varphi(f(z)),$$

*где  $\varphi$  – некоторое конформное отображение  $f(D)$  на  $f_1(D)$ .*

Данное утверждение есть специальная формулировка теоремы существования и единственности решения уравнения Бельтрами для классического случая (см. [10, теорема 1] или [11, теорема 1.3]).

### 3. О существовании и единственности гомеоморфных решений с особенностью

<sup>3</sup>Т.е. на произвольных отрезках, лежащих в упомянутых сечениях.

<sup>4</sup>В случае уравнения (2) будем писать  $P_\mu(z)$  вместо  $P_{(\mu,-1)}(z)$ .

Пусть  $D \subset \mathbb{C}$  — односвязная область и  $v = T(z) : D \rightarrow T(D) \subset \mathbb{C}$  — некоторый гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию. Определим в  $D$  функцию

$$Q_T(z) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{\max_{|z'-z|=r} |T(z') - T(z)|}{\min_{|z'-z|=r} |T(z') - T(z)|}.$$

Известно [2, гл. 1, §4], что если  $Q_T(z) < +\infty$  всюду в  $D$  и  $Q_T(z) \leq Q$  ( $Q \geq 1$  — константа) п. в. в  $D$ , то отображение  $T(z)$   $Q$ -квазиконформно в области  $D$  и, как следствие, дифференцируемо п. в. в  $D$ , имеет п. в. в  $D$  комплексную дилатацию  $\mu_0(z) = T_{\bar{z}}(z)/T_z(z)$ , первую характеристику Лаврентьева  $p_T(z)$ , якобиан  $I(z) = \frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(x_1, x_2)} > 0$  и в точках дифференцируемости  $p_T(z) = Q_T(z) = P_{\mu_0}(z)$ .

В нашем случае будет допускаться возможность вырождения  $T(z)$  (обращение  $Q_T(z)$  в  $+\infty$ ), но при этом будут налагаться следующие ограничения:

(A1) множество вырождения отображения  $T(z)$

$$E = \{z : z \in D, \sup_{z' \in B_r(z) \cap D} Q_T(z') = +\infty \text{ для всякого круга } B_r(z)\},$$

имеет меру  $\text{mes}_2 E = 0$ ;

(A2) для отображения  $T(z)$  выполняется  $N$ -свойство [12, Гл. 5, п. 1.1]: всякое множество  $E_0 \subset D$  меры  $\text{mes}_2 E_0 = 0$  переходит в множество  $T(E_0) \subset T(D)$  меры  $\text{mes}_2 T(E_0) = 0$ .

Нетрудно видеть, что условие (A1) гарантирует замкнутость множества  $E$  относительно  $D$  и локальную квазиконформность отображения  $T(z)$  в  $D \setminus E$ . В силу квазиконформности отображение  $T(z)$  дифференцируемо п. в. в  $D \setminus E$ , а следовательно и в  $D$ . При этом у него п. в. определена комплексная характеристика  $\mu_0(z)$ , первая характеристика Лаврентьева  $p(z) = P_{\mu_0}(z) = Q_T(z)$  и якобиан  $I(z)$ . Кроме того, при вышеуказанных условиях (A1), (A2) справедлива формула замены переменной в интеграле [12, Гл. 5, теорема 1.8]: для любой подобласти  $D' \Subset D$  и любой суммируемой функции  $f(v)$ , заданной в  $T(D')$ , имеет место равенство

$$\iint_{T(D')} f(v) dv_1 dv_2 = \iint_{D'} f(T(z)) I(z) dx_1 dx_2.$$

По данному отображению  $T(z)$  определим класс функций  $T^*W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$ , как множество функций вида  $f(z) = \varphi(T(z))$ , где  $\varphi \in W_{\text{loc}}^{1,2}(T(D))$ .

Заметим, что в случае  $E = \emptyset$  отображение  $T(z)$  локально квазиконформно в  $D$  и, следовательно,  $T(z) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$ . Поэтому, в силу инвариантности классов  $W_{\text{loc}}^{1,2}$  при квазиконформных отображениях (см., например, [12, Гл. 5, теорема 4.2]), заключаем, что  $T^*W_{\text{loc}}^{1,2}(D) = W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$ . Следовательно, при  $E \neq \emptyset$ , если  $f(z) \in T^*W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$ , то  $f(z) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D \setminus E)$ .

Ключевым результатом работы является следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть  $D \subset \mathbb{C}$  — односвязная область;  $v = T(z) : D \rightarrow T(D) \subset \mathbb{C}$  — гомеоморфное отображение со свойствами (A1), (A2), имеющее комплексную характеристику  $\mu_0(z)$ ; коэффициенты  $A(z), B(z)$  уравнения (1) удовлетворяют условию

$$|A(z)| + |B(z)| = 1. \quad (5)$$

Предположим, что для всякой подобласти  $D' \Subset D$  можно указать функцию  $K(z) \in W^{1,2}(D')$  такую, что

$$\begin{aligned} \iint_{D'} P_{\mu_0}(z) |\nabla K(z)|^2 dx_1 dx_2 &< +\infty, \\ \frac{|A(z) + B(z)\mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu_0(z)|) ||A(z)| - |B(z)||} &\leq K(z) \text{ п. в. в } D', \\ K(T^{-1}(v)) &\in ACL \text{ в } T(D'). \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда существует  $w = f(z) : D \rightarrow f(D) \subset \mathbb{C}$  — гомеоморфное решение с особенностью  $E$  уравнения, ассоциированного с (1). При этом  $f(z) \in T^*W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$ ,  $f^{-1}(w) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(f(D \setminus E))$  и в представлении  $f(z) = \varphi(T(z))$  отображение  $\varphi$  имеет  $W_{\text{loc}}^{1,2}$ -мажорируемую первую характеристику.

В классе  $T^*W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$  данное гомеоморфное решение с особенностью  $E$  единственно с точностью до суперпозиции с конформным отображением.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В этой теореме, а также всюду далее, говорится, что гомеоморфное решение  $f(z)$  с особенностью  $E$  единственно в классе  $T^*W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$  с точностью до суперпозиции с конформным отображением, если любое гомеоморфное решение с особенностью  $E$  из этого класса имеет вид

$$f_1(z) = \psi(f(z)),$$

где  $\psi$  — некоторое конформное отображение  $f(D)$  на  $f_1(D)$ .

Доказательству теоремы предпошем следующую лемму.

**Лемма 1.** При выполнении условий теоремы 2 для всякой области  $D' \Subset D$  функцию  $K(z) \in W^{1,2}(D')$  можно выбрать так, что  $K(T^{-1}(v)) \in W^{1,2}(T(D'))$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем  $D' \Subset D$ . Не ограничивая общности считаем границу  $\partial T(D')$   $C^1$ -гладкой. Возьмем  $K(z) \in W^{1,2}(D')$  удовлетворяющую условиям теоремы. Тогда для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\iint_{T(D')} |\nabla_v K|^2 dv_1 dv_2 < +\infty, \quad (7)$$

где  $\nabla_v K = (K_{v_1}(T^{-1}(v)), K_{v_2}(T^{-1}(v)))$ .

Поскольку  $T(z)$  локально квазиконформно в  $D \setminus E$ , то п. в. в  $D$

$$\begin{pmatrix} x_{1v_1} & x_{1v_2} \\ x_{2v_1} & x_{2v_2} \end{pmatrix} \circ T(z) = \begin{pmatrix} v_{1x_1} & v_{1x_2} \\ v_{2x_1} & v_{2x_2} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{I(z)} \begin{pmatrix} v_{2x_2} & -v_{1x_2} \\ -v_{2x_1} & v_{1x_1} \end{pmatrix},$$

и из формул дифференцирования сложной функции (см. [12, Гл. 5, теорема 4.6]), п. в. в  $D$  получаем

$$\begin{aligned} K_{v_1}(T^{-1}(v)) &= \frac{1}{I(z)} (K_{x_1} v_{2x_2} - K_{x_2} v_{2x_1}), \\ K_{v_2}(T^{-1}(v)) &= \frac{1}{I(z)} (-K_{x_1} v_{1x_2} + K_{x_2} v_{1x_2}). \end{aligned}$$

Тогда п. в. в  $D'$

$$|\nabla_v K|^2 = (K_{v_1}(T^{-1}(v)))^2 + (K_{v_2}(T^{-1}(v)))^2 =$$

$$= \frac{(v_{1x_2})^2 + (v_{2x_2})^2}{I^2(z)} K_{x_1}^2 - 2 \frac{v_{1x_1} v_{1x_2} + v_{2x_1} v_{2x_2}}{I^2(z)} K_{x_1} K_{x_2} + \frac{(v_{1x_1})^2 + (v_{2x_1})^2}{I^2(z)} K_{x_2}^2,$$

и в силу известного неравенства для положительно определенных квадратичных форм

$$\sum_{s,j=1}^2 a_{sj} \xi_s \xi_j \leq (a_{11} + a_{22})(\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad (a_{sj} = a_{js}),$$

получаем

$$|\nabla_v K|^2 \leq \frac{|\nabla v_1|^2 + |\nabla v_2|^2}{I^2(z)} |\nabla K|^2.$$

Пользуясь соотношениями

$$|\nabla v_1|^2 + |\nabla v_2|^2 = (|v_z|^2 + |v_{\bar{z}}|^2)/2, \quad I(z) = |v_z|^2 - |v_{\bar{z}}|^2,$$

$$P_{\mu_0}(z) = \frac{|v_z| + |v_{\bar{z}}|}{|v_z| - |v_{\bar{z}}|} \geq \frac{|v_z|^2 + |v_{\bar{z}}|^2}{|v_z|^2 - |v_{\bar{z}}|^2},$$

из этой оценки находим

$$|\nabla_v K|^2 \leq \frac{1}{2} \frac{P_{\mu_0}(z)}{I(z)} |\nabla K|^2.$$

Отсюда получаем неравенство (7). Лемма доказана.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.** В уравнении (1) сделаем замену переменной  $z = T^{-1}(v)$ , полагая  $\omega(v) = f(T^{-1}(v))$ . Используя тождества  $\bar{v}_{\bar{z}} = \overline{v_z}$ ,  $\bar{v}_z = \overline{v_{\bar{z}}}$ , из (1) получим

$$\tilde{A}(v)\omega_v + \tilde{B}(v)\omega_{\bar{v}} = 0, \quad (8)$$

где

$$\tilde{A}(v) = (A(z) + B(z)\mu_0(z))v_z(z)|_{z=T^{-1}(v)}, \quad (9)$$

$$\tilde{B}(v) = (A(z)\overline{\mu_0(z)} + B(z))\overline{v_z(z)}\Big|_{z=T^{-1}(v)}. \quad (10)$$

Из (9), (10), с учетом условия (A2), видим (см. [12, Гл. 5, п. 1.1]), что  $\tilde{A}(v)$ ,  $\tilde{B}(v)$  измеримые функции в  $T(D)$ . Далее, пользуясь (5) и  $|\mu_0(z)| \leq 1$ , имеем цепочку оценок

$$\begin{aligned} P_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(v) &= \frac{|\tilde{A}(v)| + |\tilde{B}(v)|}{||\tilde{A}(v)| - |\tilde{B}(v)||} \leq \\ &\leq \frac{|\tilde{A}(v)|^2 + |\tilde{B}(v)|^2}{||\tilde{A}(v)|^2 - |\tilde{B}(v)|^2|} = \frac{|(A + B\mu_0)v_z|^2 + |(A\overline{\mu_0} + B)\overline{v_z}|^2}{|| (A + B\mu_0)v_z|^2 - |(A\overline{\mu_0} + B)\overline{v_z}|^2|} = \\ &= \frac{|A + B\mu_0|^2 + |A\overline{\mu_0} + B|^2}{||A + B\mu_0|^2 - |A\overline{\mu_0} + B|^2|} = \frac{2|A + B\mu_0|^2 + |A\overline{\mu_0} + B|^2 - |A + B\mu_0|^2}{||A + B\mu_0|^2 - |A\overline{\mu_0} + B|^2|} = \\ &= \pm 1 + \frac{2|A + B\mu_0|^2}{||A + B\mu_0|^2 - |A\overline{\mu_0} + B|^2|} = \pm 1 + \frac{2|A + B\mu_0|^2}{|(1 - |\mu_0|^2)(|A|^2 - |B|^2)|} \leq \\ &\leq 1 + \frac{2|A + B\mu_0|^2}{(1 - |\mu_0|)||A| - |B||} \leq 1 + 2K(z) = 1 + 2K(T^{-1}(v)). \end{aligned}$$

По лемме 1 функция  $P_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(v)$  является  $W_{\text{loc}}^{1,2}$ -мажорируемой в  $T(D)$ . По теореме 1 существует единственное с точностью до суперпозиции с конформным

отображением гомеоморфное решение  $\omega = \varphi(v) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(T(D))$  уравнения ассоциированного с уравнением (8). Полагая  $f(z) = \varphi(T(z))$ , получаем гомеоморфное решение с особенностью  $E$  класса  $T^*W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$  уравнения, ассоциированного с (1). Ввиду отмеченной выше единственности  $\varphi$  это решение с особенностью  $E$  единственно в классе  $T^*W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$  с точностью до суперпозиции с конформным отображением.

Зафиксируем произвольно подобласть  $D' \Subset D \setminus E$ . В данной области отображение  $T(z)$  квазиконформно. Обозначим  $q(D') = \text{ess sup}_{D'} |\mu_0(z)| < 1$ .

Пусть  $K_1(z) \geq 1/2$  — функция класса  $W^{1,2}(D')$  такая, что

$$\frac{|A(z) + B(z)\mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu_0(z)|)|A(z)| - |B(z)|} \leq K_1(z) \quad (11)$$

п. в. в области  $D'$ . Из (11) вытекает оценка

$$\frac{|\mu^*(z) - \mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu^*(z)|)(1 - |\mu_0(z)|)} \leq 2K_1(z), \quad (12)$$

где  $\mu^*(z)$  — коэффициент (4) уравнения, ассоциированного с уравнением (1). Действительно, с учетом (5), при  $|B(z)| < |A(z)|$ , имеем  $|A(z)| \geq 1/2$ , откуда получаем

$$\begin{aligned} \frac{|A(z) + B(z)\mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu_0(z)|)|A(z)| - |B(z)|} &= \frac{|A(z)||1 - \overline{\mu^*(z)}\mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu_0(z)|)(1 - |\mu^*(z)|)} \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{|\mu^*(z) - \mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu_0(z)|)(1 - |\mu^*(z)|)} \end{aligned}$$

и, значит, (12). При  $|B(z)| > |A(z)|$ , снова учитывая (5), имеем  $|B(z)| \geq 1/2$  и

$$\begin{aligned} \frac{|A(z) + B(z)\mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu_0(z)|)|A(z)| - |B(z)|} &= \frac{|B(z)||\mu^*(z) - \mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu_0(z)|)(1 - |\mu^*(z)|)} \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{|\mu^*(z) - \mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu_0(z)|)(1 - |\mu^*(z)|)}, \end{aligned}$$

откуда также следует (12).

Из (12) п. в. в  $D'$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{(|\mu^*(z)| - |\mu_0(z)|)^2}{1 - |\mu^*(z)|} &\leq 2K_1(z) \iff \\ |\mu^*(z)|^2 + 2(K_1(z) - |\mu_0(z)|)|\mu^*(z)| + |\mu_0(z)|^2 - 2K_1(z) &\leq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Зафиксируем  $z$  так, чтобы выполнялось  $|\mu_0(z)| \leq q(D')$ , тогда корни трехчлена

$$y(t) = t^2 + 2(K_1(z) - |\mu_0(z)|)t + |\mu_0(z)|^2 - 2K_1(z)$$

равны  $t_{\pm} = |\mu_0(z)| - K_1(z) \pm \sqrt{K_1^2(z) + 2(1 - |\mu_0(z)|)K_1(z)}$ . При этом  $y(0) = |\mu_0(z)|^2 - 2K_1(z) < 0$  и, значит,  $t_- < 0$ ,  $t_+ > 0$ .

Заметим, что  $t_+ < 1$ , поскольку

$$|\mu_0(z)| - K_1(z) + \sqrt{K_1^2(z) + 2(1 - |\mu_0(z)|)K_1(z)} < 1 \iff 0 < (1 - |\mu_0(z)|)^2.$$

В силу (13), имеем  $|\mu^*(z)| \leq t_+$ . Так как на промежутке  $[0, 1)$  функция

$$y_1(t) = \frac{1+t}{1-t} = \frac{2}{1-t} - 1$$

возрастает, то

$$\begin{aligned} P_{(A,B)}(z) &= P_{\mu^*}(z) = y_1(|\mu^*(z)|) \leq y_1(t_+) \leq \frac{2}{1-t_+} = \\ &= \frac{2}{1 - \left( |\mu_0(z)| - K_1(z) + \sqrt{K_1^2(z) + 2(1 - |\mu_0(z))K_1(z)} \right)} = \\ &= \frac{2 \left( 1 - |\mu_0(z)| + K_1(z) + \sqrt{K_1^2(z) + 2(1 - |\mu_0(z))K_1(z)} \right)}{(1 - |\mu_0(z)|)^2} \leq \\ &\leq \frac{2 \left( 1 - |\mu_0(z)| + K_1(z) + \sqrt{K_1^2(z) + 2K_1(z) + 1} \right)}{(1 - |\mu_0(z)|)^2} = \\ &= \frac{2(1 - |\mu_0(z)|) + 2}{(1 - |\mu_0(z)|)^2} + \frac{4}{(1 - |\mu_0(z)|)^2} K_1(z) \leq \frac{4}{(1 - q(D'))^2} + \frac{4}{(1 - q(D'))^2} K_1(z). \end{aligned}$$

Тем самым  $P_{(A,B)}(z) \leq K(z)$ , где

$$K(z) = \frac{4}{(1 - q(D'))^2} + \frac{4}{(1 - q(D'))^2} K_1(z).$$

Поскольку  $K(z) \in W^{1,2}(D')$ , то по теореме 1  $f \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D')$ ,  $f^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(f(D'))$  а, значит,  $f \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D \setminus E)$ ,  $f^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(f(D \setminus E))$ .

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для уравнения (2) в условиях теоремы 2 вместо левой части неравенства (6) может быть использовано выражение

$$\frac{|\mu(z) - \mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu_0(z)|)(1 - |\mu(z)|)}.$$

Действительно, уравнение (2) можно переписать в виде уравнения (1) с коэффициентами  $A(z) = \mu(z)/(1 + |\mu(z)|)$ ,  $B(z) = -1/(1 + |\mu(z)|)$ . Для  $A(z)$ ,  $B(z)$  выполняется условие (5) и соотношение  $\mu(z) = -A/B$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{|A(z) + B(z)\mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu_0(z)|)|A(z) - |B(z)||} &= \frac{|B(z)| \left| \frac{A(z)}{B(z)} + \mu_0(z) \right|^2}{(1 - |\mu_0(z)|) \left| \frac{A(z)}{B(z)} - 1 \right|} \leq \\ &\leq \frac{|\mu(z) - \mu_0(z)|^2}{(1 - |\mu_0(z)|)|1 - |\mu(z)||}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Принадлежность  $K(T^{-1}(v))$  классу  $ACL$  в  $T(D')$  в некоторых случаях выполняется автоматически, являясь следствием свойства отображения  $v = T(z)$  сохранять этот класс. Примером отображения сохраняющего класс  $ACL$  является

$$\mathcal{F}_\delta(z) = f_\delta(x_1) + ix_2, \quad f_\delta(t) = \int_0^t \delta(\tau) d\tau,$$



где  $\delta(t)$  — положительная непрерывная при  $t \neq 0$  функция, имеющая интегрируемую особенность в нуле. Несложно проверить, что если  $K(z) \in ACL$  в  $D$ , то  $K(\mathcal{F}_\delta^{-1}(v)) \in ACL$  в  $\mathcal{F}_\delta(D)$ .

#### 4. Вырождение на линии

Пусть существует жорданова дуга  $E \subset D$ , делящая область  $D$  на две односвязные подобласти  $D_1$  и  $D_2$ , причем на  $E$  уравнение (2) вырождается, а характер вырождения описывается следующими условиями (B1), (B2).

(B1) Справедливо представление

$$|\mu(z)| = 1 + M(z)\delta(H(z)), \quad (14)$$

где:  $M(z)$  — измеримая, п. в. конечная в  $D$  функция;  $\delta(t)$  — непрерывная функция, такая, что  $\delta(t) > 0$  при  $t \neq 0$  и  $\delta(0) = 0$ ;  $H(z) \in C(D) \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$ , причем  $\nabla H(z) \neq 0$  п. в. в  $D$  и  $H(z) < 0$  в  $D_1$ ,  $H(z) > 0$  в  $D_2$ .

(B2) Существует непрерывная функция  $Z(z) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$  такая, что отображение

$$J(z) = H(z) + iZ(z) \in C(D) \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$$

является локально квазиконформным гомеоморфизмом  $D$  на  $J(D)$ , сохраняющим ориентацию.

Очевидно, из условия (B1) следует, что  $H(z) = 0$  — уравнение кривой  $E$ .

Пусть в дальнейшем  $I_1(z) = H_{x_1}Z_{x_2} - H_{x_2}Z_{x_1}$  — якобиан отображения  $J(z)$ ,  $p_J(z)$  — его первая характеристика Лаврентьева, а  $Q_J(D') = \text{ess sup}_{D'} p_J(z) \geq 1$ . Тогда в силу квазиконформности  $J(z)$  в  $D'$ , п. в. имеем

$$|\nabla H(z)|^2 + |\nabla Z(z)|^2 \leq 2Q_J(D')I_1(z) \leq 2Q_J(D')|\nabla H(z)||\nabla Z(z)|. \quad (15)$$

Всюду ниже для произвольной вещественной функции  $f(z)$ , имеющей градиент в точке  $z \in D$ , полагаем  $\nabla f(z) = f_{x_1} + if_{x_2}$  и  $\overline{\nabla f(z)} = f_{x_1} - if_{x_2}$ .

Следующие теоремы 3, 4 указывают условия на  $M$ ,  $\delta$ ,  $H$ ,  $Z$ , при которых существует гомеоморфное решение с особенностью  $E$  уравнения, ассоциированного с уравнением (2), а также описывают структуру этих решений.

**Теорема 3.** *Предположим, что выполняются условия (B1), (B2) и для всякой подобласти  $D' \Subset D$  можно указать функцию  $K(z) \in W^{1,2}(D')$  такую, что*

$$\iint_{D'} \frac{|\nabla K(z)|^2}{\delta(H)} dx_1 dx_2 < +\infty,$$

причем для п. в.  $z \in D'$

$$\frac{1}{|M(z)|\delta^2(H)} \left| \mu(z) - \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} \right|^2 + \frac{1}{|M(z)|} \leq K(z). \quad (16)$$

Положим  $T(z) = \mathcal{F}_\delta(J(z))$ . Тогда существует гомеоморфизм  $w = f(z) : D \rightarrow f(D) \subset \mathbb{C}$ , для которого справедливы утверждения:

- (i)  $f(z)$  есть решение с особенностью  $E$  уравнения, ассоциированного с (2);
- (ii)  $f(z) \in T^*W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$ ,  $f^{-1}(w) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(f(D \setminus E))$  и в представлении

$$f(z) = \varphi(T(z)) = \varphi(\mathcal{F}_\delta(J(z))) \quad (17)$$

отображение  $\varphi$  имеет  $W_{\text{loc}}^{1,2}$ -мажорируемую первую характеристику.

В классе  $T^*W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$  данное гомеоморфное решение с особенностью  $E$  единственно с точностью до суперпозиции с конформным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В развернутом виде  $T(z) = f_\delta(H) + iZ$  и для отображения  $v = T(z)$  получаем

$$\frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \delta(H)H_{x_1} & \delta(H)H_{x_2} \\ Z_{x_1} & Z_{x_2} \end{vmatrix} = \delta(H)I_1(z),$$

$$\frac{\partial T(z)}{\partial z} = \frac{1}{2}(\delta(H)\overline{\nabla H} + i\overline{\nabla Z}), \quad \frac{\partial T(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\delta(H)\nabla H + i\nabla Z),$$

откуда

$$\mu_0(z) = \frac{\partial T(z)}{\partial \bar{z}} \bigg/ \frac{\partial T(z)}{\partial z} = \frac{\delta(H)\nabla H + i\nabla Z}{\delta(H)\overline{\nabla H} + i\overline{\nabla Z}} = \frac{\nabla Z - i\delta(H)\nabla H}{\overline{\nabla Z} - i\delta(H)\overline{\nabla H}}. \quad (18)$$

Отображение  $v = T(z)$  сохраняет ориентацию, следовательно  $|\mu_0(z)| < 1$  п. в. в  $D$ .

Имеем

$$|\mu - \mu_0|^2 \leq \left| \mu - \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} \right| + \left| \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} - \mu_0 \right|^2 \leq 2 \left| \mu - \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} \right|^2 + 2 \left| \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} - \mu_0 \right|^2, \quad (19)$$

$$\frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} - \mu_0 = \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} - \frac{\nabla Z - i\delta(H)\nabla H}{\overline{\nabla Z} - i\delta(H)\overline{\nabla H}} = \frac{2\delta(H)I_1(z)}{\overline{\nabla Z}(\overline{\nabla Z} - i\delta(H)\overline{\nabla H})}.$$

Зафиксируем подобласть  $D' \Subset D$ . Тогда для п. в.  $z \in D'$ , с учетом (15), получаем

$$\left| \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} - \mu_0 \right|^2 = \frac{4\delta^2(H)I_1^2(z)}{|\nabla Z|^2(|\nabla Z|^2 + \delta^2(H)|\nabla H|^2 + 2\delta(H)I_1(z))} \leq$$

$$\leq \frac{4\delta^2(H)I_1^2(z)}{|\nabla Z|^4} \leq 16Q_J^2(D')\delta^2(H), \quad (20)$$

$$|\nabla Z|^2 + \delta^2(H)|\nabla H|^2 + 2\delta(H)I_1(z) \leq C_1(D')I_1(z), \quad (21)$$

где  $C_1(D') = 2Q_J(D') \max\{1, \sup_{D'}(\delta^2(H))\} + 2 \sup_{D'}(\delta(H)) \geq 1$ . Используя (18) и (21), получаем

$$1 - |\mu_0(z)| = \frac{4\delta(H)I_1(z)}{(1 + |\mu_0(z)|)(|\nabla Z|^2 + \delta^2(H)|\nabla H|^2 + 2\delta(H)I_1(z))} \geq \frac{1}{C_1(D')} \delta(H).$$

Отсюда, с учетом (14), (19), (20), приходим к оценке

$$\frac{|\mu - \mu_0|^2}{|(1 - |\mu(z)|)(1 - |\mu_0(z)|)|} \leq \frac{2 \left| \mu - \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} \right|^2 + 2 \left| \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} - \mu_0 \right|^2}{\frac{1}{C_1(D')} |M(z)| \delta^2(H)} \leq$$

$$\leq C_2(D') \left( \frac{1}{|M(z)| \delta^2(H)} \left| \mu - \frac{\nabla Z}{\overline{\nabla Z}} \right|^2 + \frac{1}{|M(z)|} \right), \quad (22)$$

где  $C_2(D') = 32Q_J^2(D')C_1(D')$ .

Далее, снова пользуясь (15), устанавливаем оценку

$$P_{\mu_0}(z) = \frac{1 + |\mu_0|}{1 - |\mu_0|} \leq 2 \frac{1 + |\mu_0|^2}{1 - |\mu_0|^2} = \frac{\delta^2(H)|\nabla H|^2 + |\nabla Z|^2}{\delta(H)I_1(z)} \leq \frac{C_3(D')}{\delta(H)},$$

где  $C_3(D') = 2Q_J(D') \max\{\sup_{D'}(\delta^2(H)), 1\}$ . Тогда для всякой функции  $K(z) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D')$ , выполнено неравенство

$$\iint_{D'} P_{\mu_0}(z) |\nabla K(z)|^2 dx_1 dx_2 \leq C_3(D') \iint_{D'} \frac{|\nabla K(z)|^2}{\delta(H)} dx_1 dx_2. \quad (23)$$

Имеем  $z = T^{-1}(v) = J^{-1}(\mathcal{F}_\delta^{-1}(v))$ . Пусть  $\zeta = \mathcal{F}_\delta^{-1}(v)$ . Тогда  $v = \mathcal{F}_\delta(\zeta)$ ,  $\zeta = J(z)$ . Так как отображение  $\zeta = J(z)$  локально квазиконформно, то обратное к нему  $z = J^{-1}(\zeta)$  также локально квазиконформно, и, следовательно,  $J^{-1}(\zeta) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(J(D'))$ . Поскольку  $K(z) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D')$ , то, в силу инвариантности класса  $W_{\text{loc}}^{1,2}$  при квазиконформных отображениях, имеем  $\tilde{K}(\zeta) = K(J^{-1}(\zeta)) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(J(D'))$  и по замечанию 3 заключаем о принадлежности  $K(T^{-1}(v)) = \tilde{K}(\mathcal{F}_\delta^{-1}(v)) \in ACL$  в  $T(D')$ .

Очевидно, кривая  $E$  есть множество вырождения  $T(z) = \mathcal{F}_\delta(J(z))$  и выполняются условия (A1), (A2). Таким образом, в силу замечания 2 и условия (16), полученные оценки (22), (23), обеспечивают выполнение условий теоремы 2, а, значит, и справедливость теоремы 3. Теорема доказана.

**Теорема 4.** Предположим, что выполняются условия (B1), (B2) и функция  $1/\delta(t)$  имеет интегрируемую особенность в нуле. Кроме того, предположим, что для всякой подобласти  $D' \Subset D$  можно указать функцию  $K(z) \in W^{1,2}(D')$  такую, что

$$\iint_{D'} \frac{|\nabla K(z)|^2}{\delta(H)} dx_1 dx_2 < +\infty,$$

причем для п. в.  $z \in D'$

$$\frac{1}{|M(z)|\delta^2(H)} \left| \mu(z) - \frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}} \right|^2 + \frac{1}{|M(z)|} \leq K(z).$$

Положим  $T(z) = \mathcal{F}_{\frac{1}{\delta}}(J(z))$ . Тогда существует гомеоморфизм  $w = f(z) : D \rightarrow f(D) \subset \mathbb{C}$ , для которого справедливы утверждения:

- (i)  $f(z)$  есть решение с особенностью  $E$  уравнения, ассоциированного с (2);
- (ii)  $f(z) \in T^*W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$ ,  $f^{-1}(w) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(f(D \setminus E))$  и в представлении

$$f(z) = \varphi(T(z)) = \varphi(\mathcal{F}_{\frac{1}{\delta}}(J(z)))$$

отображение  $\varphi$  имеет  $W_{\text{loc}}^{1,2}$ -мажорируемую первую характеристику.

В классе  $T^*W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$  данное гомеоморфное решение с особенностью  $E$  единственно с точностью до суперпозиции с конформным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится по той же схеме, что и в предыдущей теореме, отличаясь в деталях. Укажем эти детали.

Сначала вычисляем следующие величины:

$$\frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\delta(H)} H_{x_1} & \frac{1}{\delta(H)} H_{x_2} \\ Z_{x_1} & Z_{x_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta(H)} I_1(z),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T(z)}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\delta(H)} \overline{\nabla H} + i \overline{\nabla Z} \right), \quad \frac{\partial T(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\delta(H)} \nabla H + i \nabla Z \right), \\ \mu_0(z) &= \frac{\partial T(z)}{\partial \bar{z}} \bigg/ \frac{\partial T(z)}{\partial z} = \frac{\nabla H + i \delta(H) \nabla Z}{\overline{\nabla H} + i \delta(H) \overline{\nabla Z}},\end{aligned}\tag{24}$$

Как и в предыдущей теореме  $v = T(z)$  сохраняет ориентацию и, следовательно,  $|\mu_0(z)| < 1$  п. в. в  $D$ . Далее, устанавливаем оценку, аналогичную (19)

$$|\mu - \mu_0|^2 \leq 2 \left| \mu - \frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}} \right|^2 + 2 \left| \frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}} - \mu_0 \right|^2.$$

Пользуясь (24), получаем

$$\frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}} - \mu_0 = \frac{2\delta(H)I_1(z)}{\overline{\nabla H}(\overline{\nabla H} - i\delta(H)\overline{\nabla Z})}.$$

Зафиксируем произвольную подобласть  $D' \Subset D$ . Тогда для п. в.  $z \in D'$ , с учетом (15),

$$\begin{aligned}\left| \frac{\nabla H}{\overline{\nabla H}} - \mu_0 \right|^2 &= \frac{4\delta^2(H)I_1^2(z)}{|\nabla H|^2(|\nabla H|^2 + \delta^2(H)|\nabla Z|^2 + 2\delta(H)I_1(z))} \leq \\ &\leq \frac{4\delta^2(H)I_1^2(z)}{|\nabla H|^4} \leq 16Q_J^2(D')\delta^2(H), \\ |\nabla H|^2 + \delta^2(H)|\nabla Z|^2 + 2\delta(H)I_1(z) &\leq C_1(D')I_1(z),\end{aligned}$$

где  $C_1(D') = 2Q_J(D') \max\{1, \sup_{D'}(\delta^2(H))\} + 2 \sup_{D'}(\delta(H)) \geq 1$ . Проводя дальнейшие выкладки по аналогии с предыдущей теоремой приходим к нужному. Теорема доказана.

Теоремы 2, 3, 4 представляют собой результаты относящиеся к теории уравнений Бельтрами с известным множеством вырождения  $E$  (см. по этому поводу [13, с. 572], а из последних работ [14, гл. 13], где получены новые тонкие результаты относящиеся к этому направлению исследований). Заметим, что ранее Сребро и Якубовым [15, теорема 1.1] был получен результат близкий теореме 3 при более жестких ограничениях на  $\mu$  и  $E$ . В то же время близких аналогов теоремы 4, полученных ранее, автору неизвестно и ее результат представляется принципиально новым. Существенным отличием полученных результатов от имеющихся аналогов является также описание структуры решений.

## 5. Складки

Пусть  $D \subset \mathbb{C}$  — односвязная область, разделенная жордановой дугой  $E$  на две подобласти  $D_1$  и  $D_2$ , и пусть  $|A(z)| < |B(z)|$  п. в. в  $D_1$  и  $|A(z)| > |B(z)|$  п. в. в  $D_2$ .

Решение  $f(z)$  с особенностью  $E$  уравнения (1), гомеоморфное на множествах  $E$ ,  $D_s$  ( $s = 1, 2$ ), будем называть  $(A, B)$ -*складкой*. Дуга  $E$  называется в этом случае *линией складки*. В случае уравнения (2) вместо « $(\mu, -1)$ -складка» будем писать « $\mu$ -складка».

Напомним, что дуга  $E \subset \mathbb{C}$ , заданная аналитической по вещественному переменному  $t$  функцией  $z = f(t) : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f'(t) \neq 0$ , называется *аналитической* [16, с. 152]. Кроме того, дуга  $E \subset \mathbb{C}$  у которой угол наклона  $\theta$  между

касательной и осью абсцисс есть функция удовлетворяющая условию Гельдера  $|\theta(s'') - \theta(s')| \leq C|s'' - s'|^\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) относительно натурального параметра  $s$ , называется *дугой Ляпунова* [16, с. 108].

**Теорема 5.** Предположим, что существуют  $(A, B)$ -складка  $f(z)$  и  $g_0(z)$  — гомеоморфное в  $D$  решение с особенностью  $E$  уравнения, ассоциированного с (1). Тогда если выполняются следующие условия (a) и (b)

- (a) или  $f^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(f(D_1))$ , или  $g_0^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(g_0(D_1))$ ,
- (b) или  $f^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(f(D_2))$ , или  $g_0^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(g_0(D_2))$ ,

то справедливы утверждения:

- (i) функция  $f(z)$  представима в виде

$$f(z) = \varphi(\mathcal{B}(\psi(g_0(z)))) \quad (25)$$

где  $\varphi, \psi$  — некоторые конформные отображения;

- (ii)  $g_0(E)$  — аналитическая дуга;

(iii) если функция  $P_{(A,B)}(z)$  является  $W_{\text{loc}}^{1,2}$ -мажорируемой в  $D$ , а  $f(E)$  — дуга Ляпунова, то  $f, g_0 \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$ , а  $g_0^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(g_0(D))$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Множество  $E^* = f(E)$  есть жорданова дуга как гомеоморфный образ жордановой дуги. Отображение  $w = f(z)$  сохраняет ориентацию в  $D_1$  и меняет ее на противоположную в  $D_2$ . Поэтому области  $f(D_1)$  и  $f(D_2)$  имеют не пустое пересечение, примыкающее к  $E^*$ . Рассмотрим область  $D^* = f(D_1) \cup f(D_2)$ .

С помощью теоремы Римана можно построить конформное отображение  $\varphi_1(w)$  области  $D^*$  в нижнюю полуплоскость  $\mathbb{C}$  так, чтобы  $E^*$  перешло в промежуток вещественной оси.

Действительно, возможны три варианта: 1) область  $D^*$  односвязна, 2) область  $D^*$  не односвязна, а  $E^*$  лежит на некоторой внешней компоненте связности границы  $\partial D^*$ , 3) область  $D^*$  не односвязна, а  $E^*$  лежит на некоторой внутренней компоненте связности  $\partial D^*$ . В первом случае теорема Римана применяется непосредственно к  $D^*$ , во втором к минимальной односвязной области содержащей  $D^*$ . В третьем случае сначала берется конформное отображение «выворачивающее наизнанку»  $D^*$ , так чтобы образ  $E^*$  при данном отображении оказался на внешней граничной компоненте образа  $D^*$ . Затем теорема Римана применяется к минимальной односвязной области содержащей образ  $D^*$  и берется суперпозиция построенных отображений.

Отметим, что в силу принципа соответствия границ для конформных отображений, отображение  $\varphi_1 : D^* \rightarrow \varphi_1(D^*)$  продолжается взаимно однозначно по непрерывности на  $D^* \cup E^*$ . В силу этого  $\varphi_1(f(z))$  является  $(A, B)$ -складкой, а отображение

$$v = \Phi(z) = \begin{cases} \varphi_1(f(z)) & \text{при } z \in D_1, \\ \overline{\varphi_1(f(z))} & \text{при } z \in D_2, \end{cases}$$

есть решение с особенностью  $E$  ассоциированного уравнения. При этом

$$\varphi_1(f(z)) = \mathcal{B}(\Phi(z)).$$

Покажем, что существует такое конформное отображение  $\psi : g_0(D) \rightarrow \Phi(D)$ , что  $\Phi(z) = \psi(g_0(z))$ . Пусть в дальнейшем  $\zeta = g_0(z)$ , где  $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ .

Из построения отображения  $\Phi(z)$  ясно, что  $\Phi(z)$  — гомеоморфизм, причем  $\Phi(z) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D_s)$  ( $s = 1, 2$ ). Рассмотрим отображение

$$\Psi(v) = g_0(\Phi^{-1}(v)) : \Phi(D) \rightarrow g_0(D). \quad (26)$$

Пусть выполняется условие (а).

Если  $f^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D_1)$ , то  $\Phi^{-1}(v) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Phi(D_1))$ , а отображение  $\Psi(v)$  переводит п. в. бесконечно малые круги из области  $\Phi(D_1)$  в бесконечно малые круги области  $g_0(D_1)$ . Поскольку  $g_0 \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D_1)$ , то  $\Psi(v) \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Phi(D_1))$  [17, Гл. 3, лемма 6.4]. В силу стандартной аргументации (см., например, [11, доказательство теоремы 1]), заключаем о конформности  $\Psi(v)$  в области  $\Phi(D_1)$ .

Если  $g_0^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(g_0(D_1))$ , то как и выше

$$\Psi^{-1}(\zeta) = \Phi(g_0^{-1}(\zeta)) \in W_{\text{loc}}^{1,1}(g_0(D_1)).$$

Данное отображение переводит п. в. бесконечно малые круги из области  $g_0(D_1)$  в бесконечно малые круги области  $\Phi(D_1)$ , и, значит, как и в предыдущем случае является конформным. Тогда и обратное к нему отображение  $\Psi(v)$  также является конформным.

В случае (b) конформность  $\Psi(v)$  в  $\Phi(D_2)$  устанавливается аналогично.

Поскольку прямая  $\text{Im } v = 0$  локально спрямляема, то по теореме Пенлеве [18, с. 47], заключаем, что  $\Psi(v)$  конформное отображение области  $\Phi(D)$ .

Пусть  $\psi = \Psi^{-1}$ . Тогда  $\varphi_1(f(z)) = \mathcal{B}(\psi(g_0(z)))$ , и полагая  $\varphi = \varphi_1^{-1}$ , приходим к представлению (25).

Аналитичность дуги  $g_0(E)$  следует из равенства  $g_0(E) = \Psi(\Phi(E))$ , того факта, что  $\Phi(E)$  есть промежуток на прямой  $\text{Im } v = 0$  и в силу неравенства  $\Psi'(v) \neq 0$ , верного внутри области  $\Phi(D)$ .

Наконец, заметим, что согласно теореме 1 при  $W_{\text{loc}}^{1,2}$ -мажорируемости функции  $P_{(A,B)}(z)$  в  $D$  существует гомеоморфное решение  $g \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$  ассоциированного с (1) уравнения, такое, что  $g^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(g(D))$ . Тогда  $\Psi_1(v) = g(\Phi^{-1}(v)) : \Phi(D) \rightarrow g(D)$  конформное отображение. Учитывая конформность отображения (26), заключаем, что  $g_0(z)$  и  $g(z)$  могут отличаться друг от друга разве лишь на суперпозицию с конформным отображением. Это доказывает принадлежность  $g_0(z) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$ ,  $g_0^{-1}(\zeta) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(g_0(D))$ .

Далее, в формуле (25) принадлежность  $\mathcal{B}(\psi(g_0(z))) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$  очевидна. Поскольку  $\varphi$  отображает область, примыкающую к оси абсцисс, причем соответствующая часть оси абсцисс переходит в дугу Ляпунова  $f(E)$ , то производная  $\varphi'$  непрерывна на оси абсцисс по теореме Келлога [19, с. 411]. Отсюда заключаем, что  $\varphi(\mathcal{B}(\psi(g_0(z)))) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$ . Теорема доказана.

Следующая теорема обратна к утверждению (ii) предыдущей теоремы.

**Теорема 6.** Пусть функция  $P_{(A,B)}(z)$  является  $W_{\text{loc}}^{1,2}$ -мажорируемой в  $D$  и  $g_0(z) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$  — гомеоморфное в  $D$  решение уравнения, ассоциированного с (1).

Предположим, что дуга  $g_0(E) \subset g_0(D)$  является аналитической. Тогда в некоторой окрестности  $O(E')$  произвольной дуги  $E' \Subset E$  существует  $(A, B)$ -складка  $f(z) \in W^{1,2}(O(E'))$ .

Заметим, что существование локальных складок в окрестности  $E$ , вообще говоря, не означает их глобального существования. В [6, с. 230–232] построен пример уравнения (1) переменного типа, имеющего в некоторой окрестности произвольной точки линии смены типа решение вида складки и не допускающего складчатого решения во всей области задания уравнения.

Доказательству предпошлем следующую лемму.

**Лемма 2.** Пусть на  $\mathcal{C} = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$  определена аналитическая по вещественному переменному  $x_1$  функция  $f(x_1) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f'(x_1) \neq 0$ , причем отображение

$f : \mathcal{C} \rightarrow f(\mathcal{C})$  взаимно однозначно. Тогда для всякого интервала  $\mathcal{C}' = (\alpha', \beta') \Subset (\alpha, \beta)$  существует аналитическое продолжение  $f(z)$  на некоторую окрестность  $O(\mathcal{C}')$ , причем  $f(z)$  будет конформным гомеоморфизмом  $O(\mathcal{C}')$  на  $f(O(\mathcal{C}'))$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Продолжение в некоторую окрестность интервала  $\mathcal{C} = (\alpha, \beta)$  дается разложением  $f(z)$  в ряд Тейлора в окрестности каждой точки  $x'_1 \in (\alpha, \beta)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x'_1)}{n!} (z - x'_1)^n.$$

Как аналитическая функция, данное отображение локально-гомеоморфно в этой окрестности и гомеоморфно на  $[\alpha', \beta']$ .

Поскольку всякое локально-гомеоморфное отображение гомеоморфно на компакте гомеоморфно и в некоторой окрестности этого компакта [20, Замечание 1, с. 422], то утверждение леммы справедливо. Лемма доказана.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.** Пусть  $\zeta = \Psi(v_1) : (\alpha, \beta) \rightarrow g_0(D) \subset \mathbb{C}$  — представление дуги  $g_0(E)$  посредством аналитической по  $v_1$  функции  $\Psi(v_1)$ ,  $\Psi'(v_1) \neq 0$ .

Пусть интервал  $\mathcal{C}' = (\alpha', \beta') \Subset (\alpha, \beta)$  соответствует дуге  $g_0(E')$ . В силу леммы 2 функцию  $\Psi(v_1)$  можно аналитически продолжить в некоторую окрестность  $O(\mathcal{C}') \subset \mathbb{C}$ , так, что в ней отображение  $\Psi : O(\mathcal{C}') \rightarrow \Psi(O(\mathcal{C}'))$  будет конформным гомеоморфизмом. Обозначим через  $\Psi(v)$  указанное продолжение и положим

$$O_-(\mathcal{C}') = O(\mathcal{C}') \cap \{\operatorname{Im} v < 0\}, \quad O_+(\mathcal{C}') = O(\mathcal{C}') \cap \{\operatorname{Im} v > 0\}.$$

Не ограничивая общности можно считать, что  $\Psi(O(\mathcal{C}')) \Subset g_0(D)$ , причем  $\Psi(O_-(\mathcal{C}')) \Subset g_0(D_2)$ ,  $\Psi(O_+(\mathcal{C}')) \Subset g_0(D_1)$ . Последнего всегда можно добиться заменив, если необходимо функцию  $\Psi(v)$  на  $\Psi(-v)$ . Подходящая  $(A, B)$ -складка получается по формуле  $f(z) = \mathcal{B}(\varphi(g_0(z)))$ , где  $\varphi = \Psi^{-1}$ . Теорема доказана.

Отметим, что в [8] сформулированы некоторые результаты близкие теоремам 5, 6.

Следствием теорем 3, 5, 6 является следующее утверждение.

**Теорема 7.** Пусть выполняются условия теоремы 3 и в  $D$  определена  $\mu$ -складка  $g(z)$ . Тогда  $g(z)$  представима в виде

$$g(z) = \varphi(\mathcal{B}(\psi(\mathcal{F}_\delta(J(z))))), \quad (27)$$

где  $\varphi$  — некоторое конформное отображение,  $\mathcal{B}$  — функция Бора,  $\psi$  — некоторое отображение с  $W_{\text{loc}}^{1,2}$ -мажорируемой первой характеристикой.

Если для  $f(z)$  — произвольного гомеоморфного в  $D$  решения с особенностью  $E$ , ассоциированного с (2) уравнения, дуга  $f(E)$  аналитична, то в некоторой окрестности произвольной дуги  $E' \Subset E$  существует  $\mu$ -складка.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Сделаем в уравнении (2) замену переменной  $v = T(z)$ , где  $T(z) = \mathcal{F}_\delta(J(z))$ . Полагая  $\omega(v) = f(T^{-1}(v))$ , получим:

$$\omega_{\tilde{v}} = \tilde{\mu}(v)\omega_v, \quad (28)$$

где

$$\tilde{\mu}(v) = \frac{\mu - \mu_0}{1 - \mu\bar{\mu}_0} \cdot \frac{v_z}{\bar{v}_z} \Big|_{z=T^{-1}(v)}.$$

Функция  $P_{\tilde{\mu}}(v)$  является частным случаем функции  $P_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(v)$  из теоремы 2, а потому является  $W_{\text{loc}}^{1,2}$ -мажорируемой в  $T(D)$ . По теореме 3 в  $D$  существует некоторое гомеоморфное решение с особенностью  $E$  уравнения ассоциированного с уравнением (2). Пусть  $f(z) = \psi_1(\mathcal{F}_{\delta}(J(z))) = \psi_1(T(z))$  такое решение в соответствии с формулой (17), где  $\psi_1$  — некоторое отображение с  $W_{\text{loc}}^{1,2}$ -мажорируемой первой характеристикой.

Рассмотрим в  $T(D)$  функции  $\tilde{g}(v) = g(T^{-1}(v))$ ,  $\tilde{f}(v) = f(T^{-1}(v))$ . Данные функции являются решением уравнения (28) и решением уравнения ассоциированного с ним. Тогда выполняются условия теоремы 5 и, следовательно, имеет место представление  $\tilde{g}(v) = \varphi(\mathcal{B}(\psi_2(\tilde{f}(v))))$ , где  $\varphi$ ,  $\psi_2$  — некоторые конформные отображения. Данное равенство означает справедливость представления (27) с  $\psi = \psi_2 \circ \psi_1$ . Последнее утверждение теоремы вытекает из теоремы 6. Теорема доказана.

Аналогично, следствием теорем 4, 5, 6 будет утверждение.

**Теорема 8.** Пусть выполняются условия теоремы 4 и в  $D$  определена  $\mu$ -складка  $g(z)$ . Тогда функция  $g(z)$  представима в виде

$$g(z) = \varphi(\mathcal{B}(\psi(\mathcal{F}_{\frac{1}{\delta}}(J(z))))),$$

где  $\varphi$  — некоторое конформное отображение,  $\mathcal{B}$  — функция Бора,  $\psi$  — некоторое отображение с  $W_{\text{loc}}^{1,2}$ -мажорируемой первой характеристикой.

Если для  $f(z)$  — произвольного гомеоморфного в  $D$  решения с особенностью  $E$ , ассоциированного с (2) уравнения, дуга  $f(E)$  аналитична, то в некоторой окрестности произвольной дуги  $E' \in E$  существует  $\mu$ -складка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8 дословно повторяет доказательство теоремы 7, за тем исключением, что вместо  $\mathcal{F}_{\delta}$  должно рассматриваться  $\mathcal{F}_{\frac{1}{\delta}}$ .

**Благодарности.** Автор выражает глубокую благодарность В.М. Миклюкову за постановку задачи и постоянное внимание к работе, А.А. Клячину, В.А. Клячину, Е.Г. Григорьевой и В.И. Пелиху, прочитавшим рукопись работы и сделавших ряд ценных замечаний, а также участникам семинаров «Геометрический анализ и его приложения» и «Сверхмедленные процессы» ВолГУ, научного семинара отдела анализа и геометрии ИМ СО РАН им. С.Л. Соболева за полезное обсуждение и конструктивную критику работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.
2. Белинский П.П. Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Наука, 1974.
3. Lavrentieff M. Sur une classe de representation continues // Мат. сб. 1935. Т. 42, №4. 407–424. (см. также Лаврентьев М.А. Об одном классе непрерывных отображений // Лаврентьев М.А. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1990. С. 219–237.)
4. Волковический Л.И. Некоторые вопросы теории квазиконформных отображений // Некоторые проблемы математики и механики, к семидесятилетию М.А. Лаврентьева, Л., 1970, С. 128–134.
5. Srebro U., Yakubov E. Branched folded maps and alternating Beltrami equations // J. Anal. Math. 1996. V. 70, P. 65–90.



6. *Srebro U., Yakubov E.* Uniformization of maps with folds // Israel Math. Conf. Proc. 1997. V. 11. P. 229–232.
7. Трохимчук Ю.Ю. Непрерывные отображения и условия моногенности. М.: Физматгиз, Москва, 1963.
8. Якубов Э.Х. О решениях уравнения Бельтрами с вырождением // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 5. С. 1148–1149.
9. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
10. Миклюков В.М. Изотермические координаты на поверхностях с особенностями // Мат. сб. 2004. Т. 195, №1. С. 69–88.
11. *Martio O., Miklyukov V.M.* On existence and uniqueness of degenerate Beltrami equations // Complex Variables. 2004. V. 49. P. 647–656.
12. Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
13. *Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation // Handbook of complex analysis, geometry function theory. Amsterdam: Elsevier, 2005. V. 2, P. 555–597.
14. Миклюков В.М. Функции весовых классов Соболева, анизотропные метрики и вырождающиеся квазиконформные отображения. Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2010.
15. *Srebro U., Yakubov E.*  $\mu$ -Homeomorphisms // Contemp. Math. 1997. V. 211. P. 473–479.
16. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958.
17. *Lehto O., Virtanen K. I.* Quasiconformal mappings in the plane. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verl. 1973.
18. Монтель П. Нормальные семейства аналитических функций. М.; Л.: ОНТИ НКТП, 1936.
19. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
20. Зорич В.А. Теорема М.А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства. Мат. сб. 1967. Т. 74, № 3. С. 417–433.

Кондрашов Александр Николаевич  
 Волгоградский гос. университет, Институт математики и информационных технологий,  
 кафедра компьютерных наук и экспериментальной математики,  
 Университетский пр., 100, Волгоград 400062  
 ankondr@mail.ru