

УДК  
378-029:33  
М-75  
ГРНТИ 06.01.13

Молодежь. Образование. Экономика. Сборник научных статей участников конференции. Часть 4. – Ярославль: Изд-во «Ремдер», 2004. – 396 с.

Ответственный за выпуск: к.э.н., доцент *Воронова Л.В.*

В сборнике представлены научные статьи участников конференции по информатике, развитию и использованию информационных технологий в различных отраслях и сферах деятельности, применению современных математических методов в экономических исследованиях.

ISBN 5-94755-054-7

© МЭСИ, 2004  
© ЯФ МЭСИ, 2004  
© МУБиНТ, 2004

## ИНФОРМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

# Развёртывающиеся поверхности в евклидовом пространстве $E^3$ с гармонической второй фундаментальной формой

Черкунова Н.А.

Научный руководитель: Бодренко И.И.

Волгоградский государственный университет, г. Волгоград

Пусть  $F^2$  - двумерная поверхность в евклидовом пространстве  $E^3$ ,  $b$  - вторая фундаментальная форма,  $\bar{\nabla}$  - связность Ван дер Вардена - Бортолотти [1],  $\Delta$  - оператор Лапласа [2].

Говорят, что  $F^2$  имеет лапласово гармоническую вторую фундаментальную форму  $b$ , если  $\Delta b \equiv 0$ .

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. Развёртывающаяся поверхность  $F^2 \subset E^3$  имеет гармоническую вторую фундаментальную форму тогда и только тогда, когда  $F^2$  является одной из следующих поверхностей:

- 1) открытая часть прямого кругового цилиндра;
- 2) открытая часть прямого цилиндра на клотоиде;
- 3) открытая часть плоскости.

Доказательство теоремы опирается на результаты, полученные в работе [3] и следующие леммы.

Пусть  $g_{ij} = \langle \bar{r}_i, \bar{r}_j \rangle$  - метрический тензор поверхности  $F^2$ ,  $\bar{r}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_i}$ ,  $\bar{r}_3 = \bar{r}_n = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ ,  $(u, v)$  - локальные параметры,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  - скалярное произведение,  $(\cdot, \cdot)$  - смешанное произведение. Обозначим вторую квадратичную форму поверхности  $F^2$  через  $b_i = \frac{\langle \bar{r}_i, \bar{r}_j \rangle}{\sqrt{g}}$ , где  $\bar{r}_{11} = \bar{r}_{nn} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^2}$ ,  $\bar{r}_{12} = \bar{r}_{nn} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u \partial v}$ ,  $\bar{r}_{22} = \bar{r}_{nn} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial v^2}$ .

Лемма 1. Пусть  $\gamma$  - пространственная кривая,  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(u)$  - векторное уравнение  $\gamma$ ,  $\bar{\rho}(u) \in E^3$ ,  $|\bar{\rho}(u)| = 1$ ,  $u$  - натуральный параметр. Для конической поверхности  $F^2 \subset E^3$ , заданной уравнением

$$\bar{r}(u, v) = v \cdot \bar{\rho}(u),$$

с исключенной вершиной ( $v \neq 0$ ) и без точек уплощения выполняется:

$$\begin{cases} \Delta b_{11} = \frac{\varphi''(u) - \varphi(u)}{v}, \\ \Delta b_{12} = -\frac{2\varphi'(u)}{v^2}, \\ \Delta b_{22} = \frac{2\varphi(u)}{v^3}, \end{cases}$$

где функция  $\varphi(u) = -(\bar{\rho}(u), \bar{\rho}'(u), \bar{\rho}''(u))$ .

Доказательство. Коэффициенты первой квадратичной формы:  $g_{11} = v^2$ ,

$g_{12} = g_{21} = 0$ ,  $g_{22} = 1$ .  $\|g^{ij}\|$  - матрица, обратная к матрице  $\|g_{ij}\|$ . Тогда  $g^{11} = \frac{1}{v^2}$ ,

$g^{12} = g^{21} = 0$ ,  $g^{22} = 1$ . Коэффициенты второй квадратичной формы:

$$b_{11} = \langle \bar{r}_{11}, \bar{r}_{11} \rangle = \frac{\langle \bar{r}_{11}, \bar{r}_{11} \rangle}{\sqrt{g}} = \frac{\langle v \bar{\rho}''(u), v \bar{\rho}'(u), \bar{\rho}(u) \rangle}{\sqrt{v^3}} = -v(\bar{\rho}(u), \bar{\rho}'(u), \bar{\rho}''(u)).$$

Обозначим

$$\varphi(u) = -(\bar{\rho}(u), \bar{\rho}'(u), \bar{\rho}''(u)), \text{ тогда}$$

$$b_{11} = v\varphi(u), \quad b_{12} = b_{21} = 0, \quad b_{22} = 0.$$

Поскольку поверхность  $F^2 \subset E^3$  без точек уплощения, то  $b_{11} \neq 0$ . Следовательно,  $\varphi(u) \neq 0$ . Зная коэффициенты первой и второй квадратичных форм, вычислим

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kp} (\partial_i g_{jp} + \partial_j g_{ip} - \partial_p g_{ij}), \quad \forall i, j, k, p = 1, 2.$$

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{v}, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = -v, \quad \Gamma_{12}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Так как  $F^2 \subset E^3$ , то [1]:  $\bar{\nabla}_i b_j = \partial_i b_j - \Gamma_{ij}^k b_k - \Gamma_{ij}^n b_n$ .

$$\bar{\nabla}_1 b_{11} = \partial_1 b_{11} = v\varphi'(u), \quad \bar{\nabla}_1 b_{12} = -\frac{1}{v} b_{11} = -\varphi(u),$$

$$\bar{\nabla}_2 b_{11} = \partial_2 b_{11} - \frac{2}{v} b_{11} = \varphi(u) - 2\varphi(u) = -\varphi(u), \quad \bar{\nabla}_2 b_{12} = \bar{\nabla}_1 b_{22} = 0, \quad \bar{\nabla}_2 b_{22} = 0.$$

Так как  $\Delta b_i = g^{ij} \bar{\nabla}_j \bar{\nabla}_i b_i$ , то учитывая, что  $g^{12} = 0$ , получим:

$$\Delta b_{11} = g^{11} \bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_1 b_{11} + g^{22} \bar{\nabla}_2 \bar{\nabla}_2 b_{11},$$

$$\Delta b_{12} = g^{11} \bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_1 b_{12} + g^{22} \bar{\nabla}_2 \bar{\nabla}_2 b_{12},$$

$$\Delta b_{22} = g^{11} \bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_1 b_{22} + g^{22} \bar{\nabla}_2 \bar{\nabla}_2 b_{22},$$

где  $\bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_j b_k = \partial_i \bar{\nabla}_j b_k - \Gamma_{ij}^n \bar{\nabla}_n b_k - \Gamma_{in}^j \bar{\nabla}_j b_k - \Gamma_{in}^n \bar{\nabla}_n b_k$ ,  $\forall i, j, k, p = 1, 2$ .

Вычислим  $\bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_j b_i$ :

$$\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_1 b_{11} = \partial_1^2 b_{11} + v \partial_1 b_{11} - 4b_{11} = v\varphi''(u) + v\varphi(u) - 4v\varphi(u) = v\varphi''(u) - 3v\varphi(u),$$

$$\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_1 b_{12} = -\frac{2}{v} \partial_1 b_{11} = -2\varphi'(u),$$

$$\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_1 b_{22} = \frac{2}{v^2} b_{11} = \frac{2}{v} \varphi(u),$$

$$\bar{\nabla}_2 \bar{\nabla}_1 b_{11} = -\frac{2}{v} \partial_2 b_{11} + \frac{4}{v^2} b_{11} = \frac{2}{v} \varphi(u),$$

$$\bar{\nabla}_2 \bar{\nabla}_1 b_{12} = 0,$$

$$\bar{\nabla}_2 \bar{\nabla}_1 b_{22} = 0.$$

Таким образом,

$$\Delta b_{11} = \frac{\partial_1^2 b_{11}}{v^2} - \frac{\partial_2 b_{11}}{v} = \frac{1}{v} (\varphi''(u) - \varphi(u)),$$

$$\Delta b_{12} = -\frac{2}{v^2} \partial_1 b_{11} = -\frac{2}{v^2} \varphi'(u),$$

$$\Delta b_{22} = \frac{2}{v^4} b_{11} = \frac{2}{v^4} \phi(u).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть  $\gamma$  - пространственная кривая,  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(u)$  - векторное уравнение  $\gamma$ ,  $u$  - натуральный параметр,  $|\bar{\rho}'(u)|=1$ . Тогда для  $F^2 \subset E^3$  - поверхности касательных к пространственной кривой  $\gamma$ , заданной уравнением:

$$\bar{r}(u, v) = \bar{\rho}(u) + v \bar{\rho}'(u),$$

выполнены следующие соотношения:

$$\begin{cases} \Delta b_{11} = \frac{1}{v^2 K^2} (vK''k - vKk'' + Kk' - \frac{3vK'k}{K} + 3vK'k' + \frac{Kk}{v} + vK^3k), \\ \Delta b_{12} = \frac{1}{v^2 K^2} (2Kk' - 2K'k + \frac{Kk}{v}), \\ \Delta b_{22} = -\frac{2k}{v^3 K}. \end{cases}$$

где  $K=K(u)$  - кривизна,  $k=k(u)$  - кручение кривой  $\gamma$ .

Доказательство. Так как  $g_{11} = 1 + v^2 K^2(u)$ ,  $g_{12} = g_{21} = 0$ ,  $g_{22} = 1$ , то  $g^{11} = \frac{1}{v^2 K^2}$ ,  $g^{12} = g^{21} = -\frac{1}{v^2 K^2}$ ,  $g^{22} = \frac{1 + v^2 K^2}{v^2 K^2}$ . Коэффициенты второй квадратичной формы:

$$b_{11} = -vK(u)k(u), \quad b_{12} = b_{21} = 0, \quad b_{22} = 0.$$

Поверхность  $F^2 \subset E^3$  без точек уплощения, значит,  $b_{11} \neq 0$ . Следовательно, кривизна  $K(u) \neq 0$  и кручение  $k(u) \neq 0$ . Зная коэффициенты первой и второй квадратичных форм, вычислим:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{K'}{K} + \frac{1}{v}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{v}, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{K'}{K} - \frac{1 + v^2 K^2}{v}, \quad \Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{v}, \quad \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Тогда

$$\bar{\nabla}_1 b_{11} = vK'k - vKk' + 2Kk, \quad \bar{\nabla}_1 b_{12} = \bar{\nabla}_2 b_{11} = Kk, \quad \bar{\nabla}_1 b_{22} = \bar{\nabla}_2 b_{12} = 0, \quad \bar{\nabla}_2 b_{22} = 0.$$

Так как

$$\Delta b_{11} = g^{11} \bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_1 b_{11} + g^{12} (\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_2 b_{11} + \bar{\nabla}_2 \bar{\nabla}_1 b_{11}) + g^{22} \bar{\nabla}_2 \bar{\nabla}_2 b_{11},$$

$$\Delta b_{12} = g^{11} \bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_2 b_{12} + g^{12} (\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_2 b_{12} + \bar{\nabla}_2 \bar{\nabla}_1 b_{12}) + g^{22} \bar{\nabla}_2 \bar{\nabla}_2 b_{12},$$

$$\Delta b_{22} = g^{11} \bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_2 b_{22} + g^{12} (\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_2 b_{22} + \bar{\nabla}_2 \bar{\nabla}_1 b_{22}) + g^{22} \bar{\nabla}_2 \bar{\nabla}_2 b_{22},$$

то вычислим:

$$\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_1 b_{11} = vK''k - vKk'' - 4K'k + 5Kk' - \frac{3vK'k}{K} + 3vK'k' - \frac{3Kk}{v} + 3vK^3k,$$

$$\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_2 b_{11} = \bar{\nabla}_2 \bar{\nabla}_1 b_{11} = 2Kk' - \frac{3Kk}{v} - 2K'k,$$

$$\bar{\nabla}_2 \bar{\nabla}_2 b_{11} = -\frac{2Kk}{v},$$

$$\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_1 b_{12} = 2Kk' - 2K'k - \frac{3Kk}{v},$$

$$\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_2 b_{12} = \bar{\nabla}_2 \bar{\nabla}_1 b_{12} = -\frac{2Kk}{v},$$

$$\bar{\nabla}_2 \bar{\nabla}_2 b_{12} = 0,$$

$$\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_1 b_{22} = -\frac{2Kk}{v},$$

$$\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_2 b_{22} = \bar{\nabla}_2 \bar{\nabla}_1 b_{22} = 0,$$

$$\bar{\nabla}_2 \bar{\nabla}_2 b_{22} = 0.$$

Следовательно,

$$\Delta b_{11} = \frac{1}{v^2 K^2} (vK''k - vKk'' + Kk' - \frac{3vK'k}{K} + 3vK'k' + \frac{Kk}{v} + vK^3k),$$

$$\Delta b_{12} = \frac{2}{v^2 K^2} (2Kk' - 2K'k + \frac{Kk}{v}),$$

$$\Delta b_{22} = -\frac{2k}{v^3 K}.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы. По условию теоремы поверхность  $F^2$  имеет нулевую гауссову кривизну, следовательно,  $F^2$  является либо цилиндрической поверхностью, либо конической поверхностью, либо поверхностью касательных к пространственной кривой.

Случай 1. Пусть цилиндрическая поверхность  $F^2 \subset E^3$  задана уравнением:  $\bar{r}(u, v) = \bar{\rho}(u) + v \bar{a}$ , где  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(u)$  - векторное уравнение направляющей  $\gamma \subset E^2$ ,  $\bar{a} \perp \bar{\rho}(u)$ ,  $\bar{\rho}(u) \in C^4$ ,  $u$  - натуральный параметр,  $|\bar{a}|=1$ .  $F^2$  несет гармоническую вторую фундаментальную форму тогда и только тогда, когда кривизна  $K=K(u)$  направляющей  $\gamma$  является линейной функцией натурального параметра  $u$ :  $K(u) = C_1 u + C_2$ , где  $C_1, C_2$  - const. [3]

1) Когда  $C_1=0$ ,  $C_2 \neq 0$ , то  $K(u) = C_2 = \text{const}$ . Следовательно, направляющая  $\gamma$  является открытой частью окружности, а рассматриваемая поверхность  $F^2$  является открытой частью прямого кругового цилиндра.

2) Когда  $C_1 \neq 0$ ,  $C_2$  - произвольная константа, то рассматриваемая поверхность является открытой частью прямого цилиндра на клотоиде.

3) Когда  $C_1=0$ ,  $C_2=0$ , то  $K(u)=0$ . Следовательно, направляющая  $\gamma$  является открытой частью прямой, а поверхность  $F^2$  является открытой частью плоскости.

Случай 2. Пусть коническая поверхность  $F^2 \subset E^3$  задана уравнением  $\bar{r}(u, v) = v \bar{\rho}(u)$ . По лемме 1, для того, чтобы коническая поверхность не была гармонической второй фундаментальной форму необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} \phi''(u) - \phi(u) = 0, \\ \phi'(u) = 0, \\ \phi(u) = 0, \end{cases}$$