УДК 517.518.85+517.27

C^1-аппроксимация поверхностей уровня функций, заданных на нерегулярных сетках

В.А. Клячин, Е.А. Пабат

Ключевые слова: триангуляция, аппроксимация градиента, поверхность уровня, диаграмма Вороного.

Аннотация.
В работе рассматривается задача интерполяции поверхностей уровня функций некоторых классов – липшицевых, непрерывно дифференцируемых, функций с градиентом, удовлетворяющим условию Гельдера, дважды непрерывно дифференцируемых по их значениям в узлах нерегулярных сеток. Выводятся геометрические условия на триангуляции последовательности конечных наборов точек, обеспечивающих сходимость градиентов кусочно-линейных аппроксимаций функций. Точность полученных условий иллюстрируется на примере Шварца. Также, в статье предложен метод аппроксимации поверхностей уровня, обеспечивающий C^1- сходимость без каких-либо ограничений на геометрию взаимного расположения узлов сетки.

1 Постановка задачи и основные результаты

В настоящей статье под k-мерным симплексом S в $\mathbb{R}^n$ мы понимаем выпуклую оболочку $k+1$ точек $p_i, i=0,...,k \le n$ таких, что векторы $p_1-p_0, p_2-p_0, ..., p_k-p_0$ линейно независимы. Через $B(x,r)$ будем обозначать шар радиуса $r>0$ с центром в точке x:

$$B(x,r) = \{z : |x-z| < r\}.$$

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n,\ n>1$ – область, в которой задана последовательность $\{P_m\}$ конечных наборов точек. Для каждого такого набора рассмотрим его триангуляцию T_m. Здесь под триангуляцией набора точек мы понимаем совокупность $\{S\}$ n-мерных симплексов S, таких, что:

1) каждая точка $p_i \in P_m$ заданного набора является вершиной одного из симплексов S;

2) каждая вершина любого симплекса S является одной из точек $p_i \in P_m$;

3) внутренность пересечения любых двух симплексов пуста.

Для всякого симплекса $S \in T_m$ определим величину максимальной его стороны d_S. Положим

$$d_m = \max_{S \in T_m} d_S.$$

Мы будем рассматривать такие конечные наборы точек P_m и их триангуляции T_m, для которых выполнены условия

$$d_m \to 0 \text{ при } m \to \infty, \tag{1}$$

и

$$\text{для любой точки } x \in D \text{ и любого } \varepsilon > 0 \text{ найдется натуральное } m_0 \in \mathbb{N}, \\ \text{что для всякого } m > m_0 \text{ найдется точка } a \in P_m \text{ такая, что } |a - x| < \varepsilon\ . \tag{2}$$

Второе условие означает, что множество P_m является конечной ε-сетью при всех достаточно больших m. Рассмотрим некоторую функцию $f(x), x \in D$ класса $C^1(D)$. Для всякого натурального m построим кусочно-аффинную функцию $f_m(x)$, такую, что

$$f_m(a) = f(a), \text{ для любой точки } a \in P_m.$$

Не сложно показать, что при выполнении условий (1) и (2) последовательность $f_m(x)$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на каждом компактном подмножестве $K \subset D$.

Предположим, что $\nabla f(x) \neq 0$ в области D. Пусть $c \in \mathbb{R}$ некоторая постоянная, для которой множество уровня функции

$$I^c = \{x \in D : f(x) = c\}$$

непусто. В силу теоремы о неявной функции, множество I^c локально представляет собой график некоторой C^1-функции. Отметим, что в работах [1],[2] найдены нижние оценки размеров областей задания таких функций. В настоящей работе мы предлагаем метод построения сколь угодно близкой поверхности уровня функции в смысле следующего определения.

Определение 1. Будем говорить, что последовательность $F_m \subset D$ кусочно-аффинных поверхностей C^1-сходится к поверхности уровня I^c, если для любой сходящейся последовательности точек $y_m \in F_m$ внутренних для граней поверхностей F_m выполнено:
1. $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = y_0 \in I^c$,
2. $\lim\limits_{m\to\infty} \xi_m \perp I^c$,

где ξ_m векторы нормалей к граням в точках y_m.

Рассмотрим множества

$$I^c_m = \{x \in D : f_m(x) = c\},$$

которые представляют собой полигональные поверхности. Понятно, что из равномерной сходимости кусочно-линейных аппроксимаций $f_m(x)$ к заданной функции $f(x)$ будет следовать сходимость поверхностей I^c_m к поверхности I^c. Мы ставим перед собой задачу найти геометрические условия на триангуляцию, которые обеспечивают C^1-сходимость этих полигональных поверхностей к соответствующим поверхностям уровня функций классов $C^2(D)$, $C^{1,\alpha}(D)$, $Lip(D)$ в смысле определения 1. Кроме этого, мы решаем задачу разработки метода восстановления поверхностей уровня с учетом C^1-сходимости к I^c независимо от геометрических условий взаимного расположения точек нерегулярной сетки, кроме выполнения условий (1),(2).

Перейдем к точным формулировкам.

Рассмотрим некоторый n-мерный симплекс S. Обозначим через S_i, $(n-1)$-мерную его грань как $(n-1)$-мерный симплекс, построенный по точкам $p_0, ..., p_{i-1}, p_{i+1}, ..., p_n$. Кроме этого, с симплексом S свяжем ортонормированный базис $\{e^S_i\}$ как результат процесса ортогонализации Грама-Шмидта векторов $\{p_i - p_0\}, i = 1, ..., n$. Теперь положим

$$p_k - p_0 = \sum_{i=1}^{n} a^S_{ki} e^S_i.$$

Причем, не ограничивая общности, можно считать, что $a^S_{kk} > 0$. Ясно, что $a^S_{ki} = 0$ при $i > k$. Пусть σ^S_{lk} обозначает площадь проекции грани S_l на плоскость Π^S_k натянутую на векторы $e^S_1, ..., e^S_{k-1}, e^S_{k+1}, ..., e^S_n$. Введем величину

$$\mu^S = \frac{d_S}{nV}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|p_i - p_0|\sigma^S_{ij}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где V – объем симплекса S. Данная величина интересна тем, что она участвует в оценке разности производных функций $f(x)$ и $f_m(x)$.

Рассмотрим пример. Пусть $n = 2$ и P_0, P_1, P_2 треугольник на плоскости такой, что угол $P_2P_0P_1$ острый, а $d_S = |P_1 - P_0|$. Тогда ненулевыми коэффициентами будут a_{11}, a_{21}, a_{22}. Несложно вычислить, что

$$\sigma_{11} = a_{22},\ \sigma_{12} = a_{21},\ \sigma_{21} = 0,\ \sigma_{22} = a_{11}.$$

Поэтому

$$4(\mu^S)^2 = a^2_{11} + \left(\frac{1}{a_{11}}a^2_{11}\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}} + \frac{a_{11}}{a_{22}}\sqrt{a^2_{21} + a^2_{22}}\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22}}\right)^2 =$$

$$= a^2_{11} + \left(a_{11}\left(\frac{a_{21}}{a_{22}} + \sqrt{\left(\frac{a_{21}}{a_{22}}\right)^2 + 1}\right)\right)^2. \qquad (3)$$

Пусть φ величина угла $P_2P_0P_1$. Тогда имеет место оценка

$$\mu \leq \frac{d_S}{2}\left(1+\left(\frac{1+\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{\tan\varphi}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Следующее утверждение является ключевым для получения оценок разности градиентов функций из различных классов.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ – непрерывная функция в области $D \subset \mathbb{R}^n$ и дифференцироуемая в некоторой точке $x^0 \in D$. Для всякого $m = 1, 2, ...$ обозначим через S_m симплекс $S_m \in T_m$ такой, что x^0 внутренняя точка S_m. Пусть $p_0, ..., p_n$ – его вершины, V – объем симплекса S_m, а $\sigma_{ij}^{S_m}$ – $(n-1)$-мерная площадь проекции симплекса с вершинами в точках $p_0, ..., p_{i-1}$, $p_{i+1}, ..., p_n$ на плоскость $\Pi_j^{S_m}$. Тогда, если*

$$\beta_m = \max_{0\leq i\leq n}\left|\frac{f(p_i)-f(x^0)-\langle\nabla f(x^0), p_i-x^0\rangle}{|p_i-x^0|}\right|,$$

то

$$|\nabla f(x^0)-\nabla f_m(x^0)| \leq \frac{\beta_m}{nV}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n}\sigma_{ij}^{S_m}|p_i-x^0|\right)^2}.$$

Из теоремы непосредственно получаем

Следствие 1. *Пусть $f(x)$ функция в D, удовлетворяющая условию Липшица. Тогда, если последовательность наборов точек P_m и их триангуляций такова, что величина*

$$\frac{1}{V}\sup_{x\in S}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n}\sigma_{ij}^{S}|p_i-x|\right)^2}$$

для всех симплексов $S \in T_m$ ограничена постоянной, независящей от m, то

$$\nabla f_m(x) \to \nabla f(x) \quad \text{почти всюду в } D.$$

Теорема 2. *Предположим, что для области $D \subset \mathbb{R}^n$, последовательности наборов точек $P_m \subset D$ и их триангуляций T_m выполнены условия*

(1),(2). *Рассмотрим в области $D \subset \mathbb{R}^n$ функцию класса $C^2(D)$ и пусть $U \subset\subset D$ некоторая компактно вложенная в D подобласть. Тогда при всех m выполнено*

$$\max_{S\in T_m, S\subset U} \max_{x\in S} |\nabla f(x) - \nabla f_m(x)| \leq \frac{n}{2} (2d_m + \mu^m) \max_U \max_{1\leq i,j\leq n} \left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right|,$$

здесь

$$\mu^m = \max_{S\in T_m} \mu^S.$$

Следствие 1. *Пусть задана последовательность T_m триангуляций плоской области $D \subset \mathbb{R}^2$, для которой выполнено условие (1). Для треугольника S обозначим через φ_S величину максимального его острого угла. Тогда, если величина*

$$\max_{S\in T_m} \frac{d_S}{\tan\varphi_S} \quad \to 0 \text{ } при \text{ } m \to \infty,$$

то для любой компактно вложенной подобласти $U \subset\subset D$ выполнено

$$\max_{S\in T_m, S\subset U} \max_{x\in S} |\nabla f(x) - \nabla f_m(x)| \to 0.$$

Рассмотрим некоторый симплекс $S \in T_m$. В следующих выкладках индекс соответсвующий симплексу опущен. Пусть φ_k обозначает угол между вектором $p_k - p_0$ и плоскостью натянутой на векторы $e_1, ..., e_{k-1}$, $k = 2, ..., n$, $\varphi_1 = \pi/2$, а θ_k обозначает угол между гранью S_k и плоскостью Π_k. Если $|S_i|$ – площадь соответствующей грани симплекса, то

$$\frac{\sigma_{ik}}{\sigma_{ii}} = \frac{\sigma_{ik}/|S_i|}{\sigma_{ii}/|S_i|} \leq$$

$$\leq \frac{|S_i|}{\sigma_{ii}} = \frac{1}{|\cos\theta_i|}.$$

Таким образом, учитывая, что $nV = a_{ii}\sigma_{ii}$ для всех $i = 1, ..., n$, получаем следующую оценку

$$\mu^S \leq \sqrt{n} d_S \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\sin\varphi_i||\cos\theta_i|}.$$

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы имеет место неравенство*

$$\max_{S\in T_m, S\subset U} \max_{x\in S} |\nabla f(x) - \nabla f_m(x)| \leq d_m \lambda \left(2 + \sqrt{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\sin\varphi_i||\cos\theta_i|} \right),$$

где

$$\lambda = \frac{n}{2} \max_U \max_{1\le i,j\le n} \left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right|.$$

Далее, предположим, что функция $f(x)$ имеет непрерывные производные только первого порядка. Будем считать их равномерно непрерывными в области D. Тогда обозначим через $\omega(t)$ модуль непрерывности градиента:

$$|\nabla f(x) - \nabla f(y)| \le \omega(|x-y|).$$

Справедлива

Теорема 3. *Если $f(x)$ непрерывно дифференцируемая функция с модулем непрерывности градиента $\omega(t)$, то для любого натурального m и любого симплекса $S \in T_m$ выполнено*

$$|\nabla f(x) - \nabla f_m(x)| \le \omega(d_S) + \frac{\mu^S}{d_S^2} \int\limits_0^{d_S} \omega(t)dt.$$

Напомним, что функция $f(x) \in C^{1,\alpha}(\overline{D})$ если она непрерывно дифференцируема в области D и ее градиент удовлетворяет условию Гельдера с показателем $0 < \alpha \le 1$, т.е. найдется положительная постоянная M такая, что для всякой пары точек $x, y \in D$ выполнено

$$|\nabla f(x) - \nabla f(y)| \le M|x-y|^\alpha.$$

Следствие 1. Если $f(x) \in C^{1,\alpha}(\overline{D})$, то для любого натурального m и любого симплекса $S \in T_m$ выполнено

$$|\nabla f(x) - \nabla f_m(x)| \le M(d_S)^\alpha \left(1 + \frac{\mu^S}{(\alpha+1)d_S}\right).$$

Отметим, что результаты настоящей работы были аннотированы в [3].

2 Доказательства теорем.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим функцию $L(x)$ вида

$$L(x) = c_0 + \langle C, x - x^0 \rangle, \;\; C = (C_1, ..., C_n)$$

определенную в S_m и такую, что

$$L(p_i) = f(p_i), \quad i = 0, ..., n.$$

Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^0, то

$$f(p_i) = f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), p_i - x^0 \rangle + \gamma(p_i - x^0),$$

где $\gamma(p_i - x^0) \leq \beta_m |p_i - x^0|$, в силу определения величины β_m. Таким образом

$$c_0 + \langle C - \nabla f(x^0), p_i - x^0 \rangle = f(x^0) + \gamma(p_i - x^0).$$

Пусть $y = C - \nabla f(x^0)$, $\quad y_0 = c_0$. Разложим векторы y и $p_i - x^0$ по базису $e_1^{S_m}, ..., e_n^{S_m}$ Тогда приходим к системе уравнений

$$y_0 + \sum_{j=1}^{n} y_j (a_{ij}^{S_m} - x_j^0) = f(x^0) + \gamma(p_i - x^0), \;\; i = 0, ..., n.$$

Если теперь вычесть первое уравнение системы из остальных и решить полученную систему уравнений методом Крамера, то мы получим

$$y_j = \frac{1}{nV} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{\sigma} (\gamma(p_i - x^0) - \gamma(p_0 - x^0)) \sigma_{ij}, \;\; j = 1, ..., n,$$

где $\sigma = \pm 1$. Теперь, учитывая, что

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{\sigma} \gamma(p_0 - x^0) \sigma_{ij} = 0,$$

приходим к оценке

$$|y_j| \leq \frac{1}{nV} \sum_{i=0}^{n} |\gamma(p_i - x^0)| \sigma_{ij}, \;\; j = 1, ..., n.$$

Откуда легко получаем требуемое неравенство.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим отдельный симплекс $S \in T_m$. Выберем нумерацию точек так, что бы коэффициенты a_{ii}^S, $i = 1, ..., n$ были положительными. Положим $x^0 = p_0$. Заметим, что в силу дважды непрерывной дифференцируемости функции $f(x)$ мы можем оценить

$$\gamma(p_i - p_0) \leq \frac{n}{2} M_2 |p_i - p_0|^2,$$

где

$$M_2 = \max_U \max_{1 \le i,j \le n} \left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right|.$$

Тогда

$$\beta_m \le \frac{n}{2} M_2 d_S.$$

В силу формулы Тейлора будем иметь

$$|\nabla f(x) - \nabla f(P_0)| \le n M_2 d_S.$$

Поэтому, если $L(x)$ такая же функция как и при доказательстве теоремы 1, то

$$|\nabla f(x) - \nabla L(x)| \le |\nabla L(x) - \nabla f(P_0)| + |\nabla f(x) - \nabla f(P_0)| \le$$
$$\le |\nabla L(x) - \nabla f(P_0)| + n M_2 d_S.$$

Для завершения доказательства осталось оценить первое слагаемое в правой части этого неравенства используя утверждение теоремы 1 и полученную выше оценку для β_m. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим произвольный симплекс S с вершинами $p_0, ..., p_n$. Пусть $x \in S$ произвольная точка. Тогда, в силу непрерывности градиента, имеем для $0 \le t \le 1$

$$\nabla f(p_0 + t(x - p_0)) = \nabla f(p_0) + H(p_0 + t(x - p_0)),$$

где функция $H(p_0 + t(x - p_0))$ удовлетворяет условию $|H(p_0 + t(x - p_0))| \le \omega(t|x - p_0|)$. Умножим скалярно последнее равенство на вектор $x - p_0$ и проинтегрируем по $t \in [0, 1]$. В результате получаем равенство

$$f(x) = f(p_0) + \langle \nabla f(p_0), x - p_0 \rangle + \int_0^1 \langle H(p_0 + t(x - p_0)), x - p_0 \rangle dt.$$

Поэтому, учитывая условие на H, будем иметь

$$\left| \frac{f(x) - f(p_0) - \langle \nabla f(p_0), x - p_0 \rangle}{|x - p_0|} \right| \le \frac{1}{|x - p_0|} \int_0^{|x - p_0|} \omega(t) dt.$$

Используя теорему 1, неравенство

$$|\nabla f(x) - \nabla f(p_0)| \le \omega(|x - P_0|) \le \omega(d_S),$$

и монотонность функции

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \omega(t)dt,$$

получаем требуемое.

Рассмотрим пример. Ясно, что при выполнении условий $d_m \to 0$, $\mu^m \to 0$ площадь графика функции $f_m(x)$ над областью U будет сходится к площади соответствующей части графика функции $f(x)$. В связи с этим, напомним пример Шварца [4, глава 11, пример 7]. В этом примере рассматриваются кусочно-линейные аппроксимации прямого кругового цилиндра с радиусом основания и высотой равными 1. Триангуляция цилиндра зависит от двух параметров $n, m \in \mathbb{N}$, таких, что величина диаметров треугольников $d_{n,m} \to 0$ при $m, n \to \infty$. Предельное значение площадей получаемых многогранных поверхностей совпадает с боковой площадью цилиндра тогда и только тогда, когда $m/n^2 \to 0$ при $n, m \to \infty$. Отметим, что данный пример иллюстрирует точность теоремы 2, поскольку, как несложно вычислить, величина m/n^2 не превосходит величины $C \cdot \mu^{n,m}$, где постоянная C не зависит от n, m. Указанное соотношение не трудно следует из (3), (4).

Этот пример иллюстрирует необходимость накладывания некоторых условий на триангуляцию, относительно которой мы получаем необходимую сходимость градиентов кусочно-линейных аппроксимаций функции к градиенту заданной функции. В частности, это дает соответствующую C^1 - аппроксимацию линий и поверхностей уровня. Приведенные выше результаты дают необходимые количественные характеристики триагуляции и оценки точности приближения производных. Однако, в дополнение к этому, мы предлагаем метод C^1-аппроксимации множеств уровня функции, отличный от описанного выше и не основанный на триангуляции заданного набора точек.

3 Метод C^1-аппроксимации поверхностей уровня на произвольных сетках

Рассмотрим в области $D \subset \mathbb{R}^n$ функцию $f(x)$ класса $C^2(D)$ такую, что

$$M_2 = \sup_D \max_{1 \le i,j \le n} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right| < +\infty.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} > 0.$$

Отсюда следует, что найдется постоянная $L > 0$, такая, что для произвольных точек $x', x'' \in D$ будет выполнено

$$\left| \frac{\nabla f(x')}{|\nabla f(x')|} - \frac{\nabla f(x'')}{|\nabla f(x'')|} \right| \leq L|x' - x''|.$$

Пусть

$$m_f = \inf_D f(x),$$

$$M_f = \sup_D f(x).$$

Рассмотрим некоторое конечное $m_f < c < M_f$ и некоторую точку x^0, $f(x^0) = c$. Согласно теореме о неявной функции множество уровня $I^c = \{x \in D : f(x) = c\}$ функции $f(x)$ в некотрой окрестности точки x^0 представляет собой график некоторой C^1-функции $x_n = g(x_1, ..., x_{n-1})$. Предположим, что найдется постоянная $R > 0$ такая, что для всякого $m_f < c < M_f$ и для всякой точки $x^0 \in I^c$ найдутся шары $B^{\pm}(R)$ радиуса R такие, что

$$B^{\pm} \cap I^c = x^0,$$

$$f(x) \geq c \text{ в } B^+(R),$$

$$f(x) \leq c \text{ в } B^-(R).$$

Теперь рассмотрим в области D некоторую конечную ε-сеть E, т.е. такое конечное множество точек, что для любой точки $x \in D$ найдется точка $x' \in E$ такая, что $|x - x'| < \varepsilon$. Рассмотрим последовательность ε-сетей E^k с $\varepsilon = 1/k, k = 1, 2, ...$ Введем дополнительные обозначения

$$B^c = \{x : f(x) > c\}, \quad A^c = \{x : f(x) < c\}$$

$$H_k^+(c) = B^c \cap E^k, \quad H_k^-(c) = A^c \cap E^k.$$

Выберем некоторые два числа $m_f < c_2 < c < c_1 < M_f$ и построим поверхность

$$\Gamma_k(c_1, c_2) = \{x : \ dist(x, H_k^+(c_1)) = dist(x, H_k^-(c_2))\},$$

то есть множество точек равноудаленных от $H^+(c_1)$ и $H^-(c_2)$. Эта поверхность, очевидно представляет собой кусочно-аффинную поверхность, у которой каждая грань представляет собой часть плоскости, проходящей через середину отрезка один конец которого принадлежит $H^+(c_1)$, другой $H^-(c_2)$ и ортогональной этому отрезку. Очевидно, что

$$\Gamma_k(c_1, c_2) \subset A^{c_1} \cap B^{c_2}$$

при всех достаточно больших k. Отсюда следует, что

$$\Gamma_k(c_1, c_2) \to I^c$$

при любом стремлении $k \to \infty$ и $c_1, c_2 \to c$. Однако, не всегда такая сходимость будет C^1-сходимостью. Выясним условия, при которых указанная сходимость будет иметь место. Ясно, что для этого можно ограничиться рассмотрением окрестности точки x^0 и соответствующие рассуждения проводить для нормалей к поверхности $\Gamma_k(c_1, c_2)$ и градиентов $\nabla f(x) \perp I^c$ в соответствии с определением 1. Имеет место

Лемма 1. *Выберем $\varepsilon = 1/k < R$. Предположим, что c_1, c_2 выбраны так, что для точки $P_0 \in \Gamma_k(c_1, c_2)$ и точек $P_1 \in H^+(c_1), P_2 \in H^-(c_2)$ выполнены условия*

$$|P_0 - P_1| = |P_0 - P_2|,$$

$$0,5R > |P_0 - P_1| = \min_{P' \in H^+(c_1)} |P_0 - P'| = d > 2\varepsilon,$$

$$0,5R > |P_0 - P_2| = \min_{P' \in H^-(c_2)} |P_0 - P'| = d > 2\varepsilon,$$

$$d < \frac{1}{L}.$$

Тогда имеет место оценка

$$\left| \frac{P_1 - P_2}{|P_1 - P_2|} - \frac{\nabla f(P_0)}{|\nabla f(P_0)|} \right| \leq \frac{3\sqrt{6}}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}} + Ld \left(\frac{4 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \right).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $P \in I^{c_1}$. Тогда найдется шар радиуса $\varepsilon < R$ касающийся I^{c_1} и лежащий в B^{c_1}. Поскольку E^k является ε-сетью, то найдется точка $P' \in H^+(c_1)$ (в ε окрестности центра указанного шара)такая, что $|P - P'| < 2\varepsilon$. Поэтому

$$d \leq |P_0 - P'| \leq |P_0 - P| + |P - P'| < |P_0 - P| + 2\varepsilon.$$

Таким образом

$$dist(P_0, I^{c_1}) \geq d - 2\varepsilon.$$

Аналогично, получаем

$$dist(P_0, I^{c_2}) \geq d - 2\varepsilon.$$

Тогда существует шар $B(r)$ с центром в точке P_0 и радиуса $d - 2\varepsilon \leq r \leq d$ такой, что поверхность I^{c_1} лежит вне этого шара и касается его сферы в некоторой точке Q_1. Согласно предположению найдется шар $B^-(R)$ касающийся

I^{c_1} в точке Q_1, причем эта поверхность лежит вне этого шара. Заметим, что

$$I^{c_1} \cap B(P_0, d) \subset B(P_0, d) \setminus B^-(R).$$

Пусть α_1 – значение максимального угла между вектором P_0Q_1 и вектором P_0Q когда точка Q пробегает множество $I^{c_1} \cap B(P_0, d)$. Несложно вычислить, что

$$\sin \alpha_1 \leq \frac{\sqrt{d^2 - r^2}\sqrt{(2R - r)^2 - d^2}}{2d(R - r)}.$$

В силу условия леммы $R > 2d \geq 2r,\ d > 2\varepsilon$ и по построению $d - 2\varepsilon \leq r \leq d$, поэтому, после несложных преобразований, получаем

$$\sin \alpha_1 \leq \frac{3\sqrt{6}}{4}\sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}.$$

Заметим, что направление вектора P_0Q_1 совпадает с направлением вектора градиента функции $\nabla f(Q_1)$ поскольку этот вектор ортогонален I^{c_1} в точке $Q_1 \in I^{c_1}$. Поэтому из последней оценки приходим к неравенству

$$\left| \frac{P_1 - P_0}{|P_1 - P_0|} - \frac{\nabla f(Q_1)}{|\nabla f(Q_1)|} \right| \leq 2 \sin \alpha_1 \leq \frac{3\sqrt{6}}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}.$$

Аналогично найдем точку $Q_2 \in I^{c_2} \cap B(P_0, d)$ для которой

$$\left| \frac{P_0 - P_2}{|P_0 - P_2|} - \frac{\nabla f(Q_2)}{|\nabla f(Q_2)|} \right| \leq 2 \sin \alpha_2 \leq \frac{3\sqrt{6}}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}.$$

Применяя неравенство треугольника, получаем

$$\left| \frac{P_1 - P_2}{|P_1 - P_2|} - \frac{\nabla f(P_0)}{|\nabla f(P_0)|} \right| \leq \frac{1}{2}\left| \frac{2(P_1 - P_0)}{|P_1 - P_2|} - \frac{\nabla f(Q_1)}{|\nabla f(Q_1)|} \right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left| \frac{2(P_0 - P_2)}{|P_1 - P_2|} - \frac{\nabla f(Q_2)}{|\nabla f(Q_2)|} \right| + \frac{1}{2}\left| \frac{\nabla f(Q_1)}{|\nabla f(Q_1)|} - \frac{\nabla f(P_0)}{|\nabla f(P_0)|} \right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left| \frac{\nabla f(Q_2)}{|\nabla f(Q_2)|} - \frac{\nabla f(P_0)}{|\nabla f(P_0)|} \right| \leq$$

$$\frac{1}{2}\left| \frac{P_1 - P_0}{|P_1 - P_0|} - \frac{\nabla f(Q_1)}{|\nabla f(Q_1)|} \right| + \frac{1}{2}\left| \frac{2(P_1 - P_0)}{|P_1 - P_2|} - \frac{P_1 - P_0}{|P_1 - P_0|} \right| +$$

$$\frac{1}{2}\left| \frac{P_0 - P_2}{|P_0 - P_2|} - \frac{\nabla f(Q_2)}{|\nabla f(Q_2)|} \right| + \frac{1}{2}\left| \frac{2(P_0 - P_2)}{|P_1 - P_2|} - \frac{P_0 - P_2}{|P_0 - P_2|} \right| + Ld \leq$$

$$\frac{3\sqrt{6}}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}+\frac{1}{2}\left|\frac{2|P_1-P_0|}{|P_1-P_2|}-1\right|+\frac{1}{2}\left|\frac{2|P_2-P_0|}{|P_1-P_2|}-1\right|+Ld.$$

Применяя геометрические соображения, учитывая неравенство $d<1/L$ окончательно получаем

$$\left|\frac{P_1-P_2}{|P_1-P_2|}-\frac{\nabla f(P_0)}{|\nabla f(P_0)|}\right|\leq\frac{3\sqrt{6}}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}+Ld\left(\frac{4+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\right).$$

Лемма доказана.

Определим следующую величину

$$\delta(c_1,c_2)=\min\left\{\inf_{x\in I^{c_2}}dist(x,I^{c_1}),\inf_{x\in I^{c_1}}dist(x,I^{c_2})\right\}.$$

Ясно, что $\delta(c_1,c_2)\to 0$ при $c_1,c_2\to c$. Из леммы непосредственно следует

Теорема 4. *Пусть задана последовательность ε сетей E^k с $\varepsilon=1/k$. Если $c_1,c_2\to c$ так, что $\delta(c_1,c_2)\geq\sqrt{\varepsilon}$, то $\Gamma_k(c_1,c_2)$ C^1-сходится к I^c.*

4 Диаграмма Вороного и алгоритм построения линии $\Gamma_k(c_1,c_2)$

В настоящем параграфе мы раскрываем связь между предложенным выше методом построения поверхностей уровня и хорошо известной конструкцией в вычислительной геометрии – диаграммой Вороного [5]. Мы ограничимся рассмотрением плоского случая. Однако все изложенное ниже легко переносится на многомерные поверхности. Мы предлагаем конструктивное построение ломаной $\Gamma_k(c_1,c_2)$ на плоскости.

Напомним определение диаграммы Вороного. Пусть на плоскости задано множество S, содержащее N точек $\{p_i\}_{i=1}^N$. Рассмотрим точку p_i. Множество $V(i)$ точек, более близких к p_i, чем к любой другой точке из S получается в результате пересечения $N-1$ полуплоскостей. Это множество – выпуклая многоугольная область, имеющая не более $N-1$ сторон. Таким образом,

$$V(i)=\cap_{i\neq j}H(p_i,p_j),$$

где

$$H(p_i,p_j)=\{x\in R^2:|x-p_i|\leq|x-p_j|\}.$$

Область $V(i)$ называется *многоугольником Вороного*, соответствующим точке p_i. Получаемые таким образом N множеств образуют разбиение плоскости, представляющее некоторую сеть, называемую *диаграммой Вороного* $Vor(S)$.

Пусть задано разбиение множества S на два подмножества $S = S_1 \cup S_2$. Обозначим через $\sigma(S_1, S_2)$ множество ребер диаграммы Вороного, общих для пар многоугольников $V(i)$ и $V(j)$ диаграммы $Vor(S)$, где $p_i \in S_1$ и $p_j \in S_2$. Совокупность ребер $\sigma(S_1, S_2)$ называется *разделяющей цепью.*

Предположим, что зафиксированы $c_2 < c < c_1$ и требуется для заданной ε-сети E построить линию $\Gamma_k(c_1, c_2)$. Алгоритм построения включает в себя следующую последовательность действий.

1. Строим диаграмму Вороного множества точек $S = S_1 \cup S_2$, где

$$S_1 = H_k^+(c_1), \quad S_2 = H_k^-(c_2)$$

по одному из алгоритмов, описанных, например, в главе 5 книги [5].

2. Находим разделяющую цепь $\sigma(S_1, S_2)$. Покажем, что эта линия совпадает с $\Gamma_k(c_1, c_2)$ Действительно, точка $x \in \Gamma_k(c_1, c_2)$ согласно определению $\Gamma_k(c_1, c_2)$, если, и только если выполнено равенство:

$$dist(x, H_k^+(c_1)) = dist(x, H_k^-(c_2)),$$

где расстояния от точки до множества определяется так

$$dist(x, F) = \inf_{y \in F} |x - y|.$$

Возьмем какое-то ребро L нашей разделяющей цепи $\sigma(S_1, S_2)$. Тогда найдутся точки p_i и p_j такие,что:

$$L = V(p_i) \cap V(p_j), \;\; p_i \in H_k^+(c_1), \;\; p_j \in H_k^-(c_2).$$

Рассмотрим произвольную точку $x \in L$. Покажем, что

$$dist(x, H_k^+(c_1)) = |x - p_i|,$$

и

$$dist(x, H_k^-(c_2)) = |x - p_j|.$$

Это следует из определения многоугольника Вороного. Действительно, поскольку $x \in L$, то $x \in V(p_i)$ и, значит, точка x ближе к точке p_i, чем к любой другой точке $p \in H_k^+(c_1)$, то есть

$$dist(x, H_k^+(c_1)) = \inf_{y \in H_k^+(c_1)} |x - y| = |x - p_i|.$$

Аналогично, поскольку $x \in L$, то $x \in V(p_j)$ и, значит, точка x ближе к точке p_j, чем к любой другой точке $p \in H_k^-(c_2)$, то есть

$$dist(x, H_k^-(c_2)) = \inf_{y \in H_k^-(c_2)} |x - y| = |x - p_j|.$$

С другой стороны, из того, что $x \in V(p_i)$ и $x \in V(p_j)$, следует, что $dist(x, p_i) = dist(x, p_j)$, а, значит,

$$dist(x, H_k^+(c_1)) = dist(x, H_k^-(c_2)),$$

то есть $x \in \Gamma_k(c_1, c_2)$. Обратное доказывается аналогично.

Список литературы

1. Миклюков В.М. Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти квазиконформные отображения. – Волгоград : Изд-во ВолГУ, Лаб."Сверхмедленные процессы", 2007. – 532 С.

2. Zhuravlev I.V., Igumnov A.Yu., Miklyukov V.M. An implicit function theorem, Rocky Mountain Journal of Mathematics, v. 36,№ 1, 2006, 357 – 365.

3. Грачева Е.А., Клячин В.А. Кусочно-линейное интерполирование поверхностей уровня функций, заданных на нерегулярных сетках. // Записки семинара "Сверхмедленные процессы", Волгоград, Изд-во ВолГУ, 2008. Вып. 3, с. 157 – 167.

4. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе.//Волгоград, Изд-во ПЛАТОН, 1997. – 251 С.

5. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. М.:Мир, 1989. – 478 С.

Пабат(Грачева) Евгения Александровна
Волгоградский государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
400062, Волгоград пр-кт Университетский, 100
gracheva_ evg@mail.ru
Тел. раб. (8442)460261

Клячин Владимир Александрович
Волгоградский государственный университет
Факультет математики и информационных технологий
400062, Волгоград пр-кт Университетский, 100
klchnv@mail.ru
Тел. раб. (8442)460261