



УДК 537.868:536.33
ББК 31.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ СУШКИ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ МАССООБМЕНА НА ОСНОВЕ ЗАКОНА ИСПАРЕНИЯ ДАЛЬТОНА ¹

Афанасьев Анатолий Михайлович

Доктор технических наук, профессор кафедры информационной безопасности,
Волгоградский государственный университет
alkiona111@yandex.ru, infsec@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Сипливый Борис Николаевич

Доктор технических наук, профессор кафедры теоретической физики и волновых процессов,
Волгоградский государственный университет
tf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Показано, что линейные краевые условия массообмена на основе закона Ньютона, которые традиционно используются в задачах теории тепломассопереноса, непригодны для описания важного для практики периода постоянной скорости сушки. Для исследования этого периода разработаны нелинейные краевые условия третьего рода на основе закона испарения Дальтона. Только в модели Дальтона оказывается возможным объяснить возникновение периодов с постоянной скоростью сушки и получить правильное соотношение между интенсивностями двух видов сушки (конвективной и электромагнитной).

Ключевые слова: математическое моделирование, электромагнитная сушка, закон испарения Дальтона, период постоянной скорости сушки.

Введение

Известно, что один из основателей отечественной школы сушки, А.В. Лыков, так же как и его ближайшие последователи, в основном придерживались *линеаризованных* уравнений тепломассопереноса и *аналитических* методов исследования, основанных на преобразовании Лапласа. Такой подход позволяет для тел простой формы (пластина, цилиндр, шар) находить решения начально-краевых задач для полей температуры и влагосодержания, которые имеют вид рядов и позволяют приближенно рассчитывать основные характеристики сушки [7; 8]. Но в литературе до сих пор не обращалось внимания на то, что построенные таким образом решения удовлетворительно согласуются с закономерностями лишь двух периодов сушки: периода про-

грева и периода падающей скорости сушки, а важный для практики и хорошо известный из опыта период постоянной скорости сушки, как будет показано ниже, моделировать эти решения уже не могут. Целью статьи является выявление причин, приводящих к такому расхождению теории с экспериментом, и разработка новой, скорректированной модели электромагнитной сушки, в которой это противоречие будет устранено.

Математическая модель электромагнитной сушки

На рисунке 1 показана схема сушки влажного образца произвольной формы. Образец обдувается воздушным потоком и подвергается воздействию электромагнитных волн. За счет поглощения электромагнитной энергии возбуждаются процессы нагревания материала и испарения жидкости. Вследствие этого возникают тепловые потоки и потоки влаги как внутри образца, так и с его поверхности, причем внутри образца влага переносится частично в виде жидкости, частично в виде пара, а с поверхности она удаляется только в виде пара.

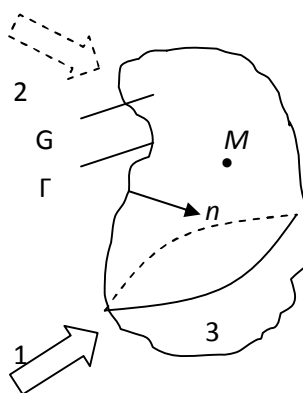


Рис. 1. Схема электромагнитной сушки:

1 – воздушный поток; 2 – электромагнитная волна; 3 – влажный образец

Для описания процесса сушки будем использовать теорию тепломассопереноса А.В. Лыкова [7]. В рамках этой теории влажный материал считается состоящим из трех компонентов: твердой основы, воды и пара. *Влагосодержанием* материала U называют отношение массы воды к массе твердой основы в малом объеме вблизи выбранной точки. Вода и пар могут диффундировать сквозь твердый скелет. Плотность потока влаги \mathbf{j} при таком движении удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\mathbf{j} = -a_m \rho_0 \cdot \text{grad } U - a_m^t \rho_0 \cdot \text{grad } T; \quad \text{div } \mathbf{j} = -\rho_0 \frac{\partial U}{\partial \tau}. \quad (1)$$

В этих формулах ρ_0 , a_m , a_m^t – теплофизические характеристики материала соответственно: плотность в сухом состоянии, коэффициент диффузии влаги, коэффициент термодиффузии влаги (применяют также обозначение $\delta = a_m^t/a_m$ – относительный коэффициент термодиффузии влаги). Согласно первой формуле, влага перемещается за счет перепадов влагосодержания $U(M, \tau)$ и температуры $T(M, \tau)$ (диффузия и термодиффузия). Здесь M – переменная точка в области построения решения и τ – время. Вторая из формул (1) представляет собой закон сохранения вещества для потока влаги. Разделение этого потока на воду и пар и интенсивность превращения воды в пар I даются следующими формулами:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{воды}} + \mathbf{j}_{\text{пара}}; \quad \mathbf{j}_{\text{пара}} = \gamma \mathbf{j}; \quad I = \gamma \rho_0 \frac{\partial U}{\partial \tau}. \quad (2)$$

Величина γ есть коэффициент испарения. Для плотности потока тепла \mathbf{q} считается выполненным соотношение Фурье:

$$\mathbf{q} = -\lambda \cdot \text{grad } T, \quad (3)$$

где λ – коэффициент теплопроводности.

Следствием этих соотношений являются уравнения распространения тепла и влаги в области G с границей Γ . Они имеют следующий вид:

$$c\rho_0 \frac{\partial T}{\partial \tau} = \text{div} (\lambda \cdot \text{grad } T) + r\gamma\rho_0 \frac{\partial U}{\partial \tau} + W \quad (M \in G); \quad (4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \text{div} (a_m \cdot \text{grad } U + a_m^t \cdot \text{grad } T) \quad (M \in G), \quad (5)$$

где c – удельная теплоемкость материала; r – удельная теплота парообразования воды; W – плотность внутренних источников тепла, вызванных поглощением проникающего электромагнитного излучения.

Теплофизические характеристики материала c , λ , a_m , a_m^t являются заданными функциями температуры T и влагосодержания U . Коэффициент теплопроводности, коэффициенты диффузии и термодиффузии не выносятся из-под знака дивергенции, то есть моделью учитывается теплофизическая неоднородность среды. Плотность внутренних источников тепла в общем случае должна находиться путем совместного решения уравнений электродинамики и тепломассопереноса при известных характеристиках падающей электромагнитной волны [2; 4]. В простейшем случае ее можно считать заданной функцией. Отметим, что появление в уравнении (4) слагаемого с производной $\partial U/\partial \tau$ вызвано процессами внутреннего парообразования или конденсации.

Рассмотрим теперь краевые условия. Пусть M – переменная точка на границе Γ , разделяющей влажное тело и воздушную среду, и ось n задает направление *внутренней* по отношению к телу нормали к границе в этой точке (рис. 1). Краевое условие массообмена имеет следующий вид:

$$J(M, \tau) = a_m \rho_0 \frac{\partial U}{\partial n}(M, \tau) + a_m^t \rho_0 \frac{\partial T}{\partial n}(M, \tau) \quad (M \in \Gamma). \quad (6)$$

Это равенство выражает собой закон сохранения вещества в окрестности точки M : интенсивность J отвода пара в окружающую среду с внешней стороны поверхности тела равна интенсивности, с которой влага (жидкость + пар) подводится к поверхности изнутри тела.

Баланс энергетических потоков на поверхности (краевое условие теплообмена) выглядит так:

$$Q(M, \tau) + r(1-\gamma) \cdot J(M, \tau) = \lambda \frac{\partial T}{\partial n}(M, \tau) \quad (M \in \Gamma), \quad (7)$$

где Q есть интенсивность отвода тепла с поверхности в окружающую среду.

Второе слагаемое в левой части (7) без множителя r есть поток жидкости, который подводится изнутри тела к его поверхности. После умножения на r это выражение становится потоком тепла, который нужен для непрерывного превращения данного количества жидкости в пар. Таким образом, смысл уравнения (7) раскрывается так: тепловой поток, который подводится к поверхности изнутри тела (правая часть уравнения), расходуется на испарение с поверхности и на теплообмен с окружающей средой.

Заметим, что под нормальными производными в формулах (6) и (7) понимаются, конечно, предельные значения этих производных при подходе к границе *изнутри* тела.

Введенная выше интенсивность теплообмена поверхности образца с воздушной средой определяется следующим выражением ($M \in \Gamma$):

$$Q(M, \tau) = \alpha_w [T(M, \tau) - T_b] + \sigma \tilde{A} [(T(M, \tau) + T_1)^4 - (T_b + T_1)^4]. \quad (8)$$

Эта формула учитывает теплообмен конвекцией и теплообмен излучением. В этой формуле T_b – температура воздуха за пределами пограничного слоя; σ – постоянная Стефана-Больцмана; \tilde{A} – коэффициент теплового излучения; α_w – коэффициент теплообмена поверхности образца с воздушной средой; $T_1 = 273$ °C – постоянная.

Интенсивность массообмена $J(M, \tau)$, входящая в краевые условия (6) и (7), зависит от состояния пограничного слоя, ламинарного или турбулентного, и является сложной функцией температуры и влагосодержания поверхности вблизи точки M , а также таких характеристик воздушного потока вблизи этой точки, как давление, температура, скорость, влажность, коэффициенты теплопроводности и влагопроводности, коэффициент диффузии пара в воздухе, кинематическая вязкость. Подробнее говорить об этой зависимости мы будем в следующем пункте.

Начальные условия, определяющие распределения температуры и влагосодержания при $\tau = 0$, выглядят так:

$$T(M, 0) = f_1(M); \quad U(M, 0) = f_2(M), \quad (9)$$

где $f_1(M)$ и $f_2(M)$ – некоторые заданные функции.

Уравнения распространения тепла и влаги в данном случае являются *квазилинейными*, а краевые условия тепло- и массообмена – *нелинейными*. Решение сформулированной начально-краевой задачи при таких условиях может быть проведено только численными методами.

Интенсивность массообмена в форме Ньютона и в форме Дальтона

При расчете интенсивности массообмена $J(M, \tau)$ возможны два подхода. Как уже говорилось, школой А.В. Лыкова традиционно используются линеаризованные уравнения тепломассообмена и основанные на них аналитические методы исследования. При таком подходе граничные условия массообмена принимаются в виде линейных условий Ньютона, когда интенсивность испарения влаги с поверхности образца $J(M, \tau)$ пропорциональна разности между текущим влагосодержанием на этой поверхности $U(M, \tau)$ и равновесным влагосодержанием материала U_p (тем влагосодержанием, которое устанавливается в материале в результате его длительного контакта с воздушной средой):

$$J(M, \tau) = \beta_m [U(M, \tau) - U_p], \quad (10)$$

где β_m – коэффициент массообмена по перепаду влагосодержания.

Другой подход состоит в следующем. Как известно, при обтекании влажного материала потоком воздуха вблизи его поверхности образуется так называемый *пограничный слой*. Пусть M – некоторая точка на поверхности. Согласно *закону Дальтона*, плотность потока пара, который отводится через пограничный слой в окружающую среду в окрестности этой точки, определяется выражением

$$J(M, \tau) = \alpha_m [p(M, \tau) - p_b], \quad (11)$$

где $p(M, \tau)$ и p_b – относительное парциальное давление пара (то есть отношение парциального давления пара к нормальному атмосферному давлению) вблизи точки M на поверхности и в

воздухе за пределами пограничного слоя, а α_m – коэффициент массообмена по перепаду парциального давления пара. Приняв эту формулу за основу, выполним следующие построения.

Зависимость относительного парциального давления *насыщенного* водяного пара P от его температуры T будем моделировать формулой, предложенной Г.К. Филоненко [7]:

$$P(T) = 6,03 \cdot 10^{-3} \cdot \exp \frac{17,3 \cdot T}{T + T_2}, \quad T_2 \equiv 238 \text{ } ^\circ\text{C} . \quad (12)$$

График этой функции показан на рисунке 2. В дальнейшем для краткости относительное парциальное давление водяного пара будем называть просто его давлением. Хорошо известно, что пока влагосодержание на поверхности материала остается выше некоторого *критического значения* $U_{кр}$, водяной пар вблизи этой поверхности можно считать *насыщенным*. Это означает, что в таких условиях $p(M, \tau) = P(T(M, \tau))$, то есть давление пара вблизи поверхности равно давлению насыщенного пара при температуре поверхности (она обозначена как $T(M, \tau)$). Из определения влажности воздуха φ вытекает, что давление пара вне пограничного слоя будет определяться формулой $p_v = \varphi \cdot P(T_v)$. Следовательно, закон испарения Дальтона (11) будет выглядеть так:

$$J(M, \tau) = \alpha_m [P(T(M, \tau)) - \varphi \cdot P(T_v)] . \quad (13)$$

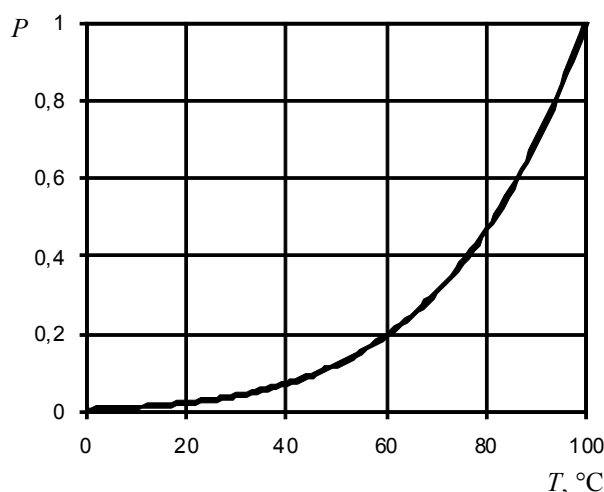


Рис. 2. График функции Г.К. Филоненко

Это выражение для интенсивности сушки имеет ясное физическое толкование, и именно оно лучше других согласуется с экспериментом. Но не следует забывать, что формула Дальтона представляет собой *нелинейное* краевое условие, при котором исходная задача может быть решена только *численными* методами.

Проведем сравнение краевых условий Ньютона (10) и Дальтона (13).

Ясно, что формула Ньютона (10) может оказаться хорошей моделью при описании конвективной сушки: интенсивность сушки тем выше, чем больше разность между влагосодержанием на поверхности и равновесным влагосодержанием, что выглядит вполне правдоподобно. Но для электромагнитной сушки эта формула явно не подходит, поскольку она не учитывает повышение интенсивности сушки при повышении температуры материала.

Напротив, формула (13) согласуется с закономерностями обоих видов сушки, сушки электромагнитной и сушки в потоке нагретого воздуха. При конвективной сушке температура поверхности $T(M, \tau)$ всегда *ниже* температуры воздуха T_v . Именно благодаря этому неравенству существует поток тепла из окружающей среды к материалу, нужный для испарения воды. Но, с

другой стороны, именно из-за этого неравенства получаем $P(T(M, \tau)) < P(T_v)$ (ведь функция Филоненко – монотонно возрастающая), так что необходимое для сушки условие $J > 0$ получается лишь из-за неравенства $\varphi < 1$, то есть из-за того, что пар за пределами пограничного слоя, в отличие от пара вблизи поверхности, не является насыщенным. Из этого ясно, что при конвективной сушке плотность потока пара J , то есть интенсивность сушки, принципиально не может быть значительной (неэффективность такого способа сушки ясна с самого начала). Напротив, при электромагнитной сушке после разогрева материала температура поверхности $T(M, \tau)$ всегда будет *выше* температуры воздуха T_v , и потому для возрастания интенсивности испарения с поверхности J не будет никаких препятствий.

Еще одно противоречие, к которому приводит закон массообмена Ньютона, связано с существованием *периода (этапа) постоянной скорости сушки*. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Известно, что процесс сушки, в том числе и с использованием проникающего электромагнитного излучения, во многих случаях можно считать состоящим из трех периодов (или этапов). Эти периоды наглядно обнаруживают себя в опыте, при условии, что образец имеет простую геометрическую форму, а все характеристики, определяющие процесс сушки, во времени не изменяются. На первом этапе, имеющем небольшую продолжительность, влага почти не удаляется, а вся поступающая извне энергия расходуется на нагревание образца (*переходной* этап сушки, или этап *прогрева*). На втором этапе, наоборот, вся энергия расходуется на испарение воды, а нагревания образца почти не происходит (*установившийся* этап сушки). Все характеристики второго этапа не зависят от начальных распределений температуры и влагосодержания. Характерной чертой второго этапа является то, что температурное поле здесь оказывается стационарным, интенсивности тепло- и массообмена – постоянными, а поле влагосодержания – квазистационарным, то есть производная от влагосодержания по времени во времени не изменяется. Из-за последнего условия этот этап обычно называют *этапом (режимом) постоянной скорости сушки*. Именно на втором этапе из материала удаляется основная часть влаги, а интенсивности тепло- и массообмена поверхности образца с окружающей средой достигают своих максимальных значений. Формально этот этап устанавливается асимптотически, то есть при $\tau \rightarrow \infty$, а фактическое время его установления может занимать от 10 до 40 % от общего времени сушки. Завершается процесс сушки *третьим этапом*. Его продолжительность невелика, влагосодержание на этом этапе близко к равновесному, влага почти не удаляется, температура материала быстро растет, пока не достигается тепловое равновесие с излучением и воздушным потоком.

Ясно, что при разработке приближенных методов расчета основных характеристик сушки достаточно рассмотреть лишь второй этап, а первый и третий этапы можно исключить из рассмотрения.

Переходя к подробному изучению второго этапа, перечислим его основные черты:

1. Начальные распределения температуры и влагосодержания не оказывают никакого влияния на процесс.
2. Интенсивности тепло- и массообмена поверхности пластины с воздушным потоком не изменяются во времени.
3. Температурное поле имеет стационарный вид.
4. Влагосодержание в любой точке уменьшается во времени по линейному закону с одной и той же скоростью.

Формально условия 2–4 можно записать так:

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} = 0; \quad \frac{\partial J}{\partial \tau} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial \tau} = \text{const} . \quad (14)$$

Эти формулы можно рассматривать как тест, которому должна удовлетворять любая теория, претендующая на описание второго периода сушки.

Ясно, что закон массообмена Ньютона (10) пройти указанное тестирование не может, поскольку предлагаемая этой формулой связь между интенсивностью сушки и влагосодержанием исключает одновременное выполнение второго и четвертого из условий (14). Таким образом, любые работы, основанные на законе массообмена в форме Ньютона, будут с неизбежностью приводить к противоречию с экспериментом, в котором исследуется режим постоянной скорости сушки. В качестве примера такой работы укажем на [6]. Полученное в этой работе методом преобразования Лапласа аналитическое решение задачи о сушке пластины приводит к полям температуры и влагосодержания, которые изменяются во времени монотонно по закону, близкому к экспоненциальному. Следовательно, условия (14) оказываются неудовлетворенными.

Напротив, формула Дальтона, в отличие от формулы Ньютона, не противоречит закономерностям периода постоянной скорости сушки (14). Действительно, одновременная неизменность во времени переменных J , T и постоянство производной $\partial U/\partial \tau$, с точки зрения формулы Дальтона (13), оказывается вполне возможным.

Докажем теперь формально, что при условиях Дальтона асимптотическое решение начально-краевой задачи для полей температуры и влагосодержания будет удовлетворять соотношениям (14). Этот вопрос мы рассмотрим на примере электромагнитной сушки пластины.

Задача о сушке однородной пластины: режим постоянной скорости сушки

Типовая схема сушки плоского образца показана на рисунке 3. Условие тепло- и влагоизоляции нижней поверхности пластины (рис. 3) означает, что исходным объектом изучения является образец толщиной $2d$, у которого вследствие идентичности краевых условий на границах $x = 0$ и $x = 2d$ отсутствуют тепловые потоки и потоки влаги сквозь плоскость симметрии $x = d$.

Для анализа процесса сушки сделаем несколько упрощающих предположений. Примем следующие условия: а) плотность источников тепла W зависит только от x ; б) интенсивность теплообмена Q и интенсивность массообмена J поверхности пластины $x = 0$ с набегающим потоком воздуха слабо изменяются вдоль этой поверхности и являются функциями только времени τ ; в) толщина пластины d является малой по сравнению с ее размерами в направлениях, перпендикулярных оси x ; г) материал пластины является *однородным*. В этих условиях искомые распределения – температура материала T и его влагосодержание U – будут функциями только от x и τ :

$$T = T(x, \tau); \quad U = U(x, \tau).$$

Тогда начально-краевая задача для расчета функций T и U будет выглядеть так:

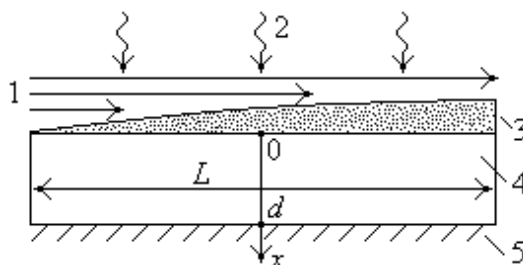


Рис. 3. Сушка плоского образца:

1 – воздушный поток; 2 – плоская электромагнитная волна;
3 – пограничный слой; 4 – пластина из влажного материала; 5 – тепло- и влагоизоляция

$$c\rho_0 \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + r\gamma\rho_0 \frac{\partial U}{\partial \tau} + W; \quad (15)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = a_m \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_m^1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad (16)$$

$$Q(\tau) + r(1-\gamma) \cdot J(\tau) = \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(0, \tau); \quad (17)$$

$$J(\tau) = a_m \rho_0 \left[\frac{\partial U}{\partial x}(0, \tau) + \delta \frac{\partial T}{\partial x}(0, \tau) \right]; \quad (18)$$

$$Q(\tau) = \alpha_w [T(0, \tau) - T_b] + \sigma \tilde{A} \left[(T(0, \tau) + T_1)^4 - (T_b + T_1)^4 \right]; \quad (19)$$

$$J(\tau) = \alpha_m [P(T(0, \tau)) - \varphi \cdot P(T_b)]; \quad (20)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(d, \tau) = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial x}(d, \tau) = 0; \quad (21)$$

$$T(x, 0) = f_1(x); \quad U(x, 0) = f_2(x). \quad (22)$$

где $f_1(x), f_2(x)$ – некоторые заданные распределения.

В качестве следующего приближения примем, что функция W не зависит от времени (электромагнитное поле является *стационарным*). Как известно, при этом дополнительном условии задачи для уравнения диффузии приобретают следующее свойство: их решения при $\tau \rightarrow \infty$ (*асимптотические решения*) перестают зависеть от начальных данных. Для частного случая это утверждение доказано в [9]. Опираясь на теорему единственности, его можно переформулировать следующим образом: любое решение начально-краевой задачи, полученное тем или иным способом (например, способом подбора, использованным ниже) и удовлетворяющее всем сформулированным условиям, за вычетом начальных условий, будет являться решением исходной задачи при $\tau \rightarrow \infty$.

В нашем случае асимптотическое решение можно построить следующим образом (все величины, относящиеся к решениям такого вида, будем отмечать индексом « ∞ »). Положим $\partial T / \partial \tau = 0 \leftrightarrow T = T(x)$ (стационарное температурное поле). Неизменяемую во времени температуру поверхности пластины обозначим T_∞ : $T(0, \tau) = \text{const} \equiv T_\infty$. Значение этой постоянной будет вычислено ниже. Теперь из формул (19) и (20) видно, что интенсивности тепло- и массообмена также оказываются не зависящими от времени, причем они однозначно определяются температурой T_∞ :

$$Q|_{\tau \rightarrow \infty} = \sigma \tilde{A} \left[(T_\infty + T_1)^4 - (T_b + T_1)^4 \right] + \alpha_w (T_\infty - T_b) \equiv Q_\infty(T_\infty); \quad (23)$$

$$J|_{\tau \rightarrow \infty} = \alpha_m [P(T_\infty) - \varphi \cdot P(T_b)] \equiv J_\infty(T_\infty). \quad (24)$$

Эти две функции будут играть важную роль в дальнейших построениях.

Примем теперь $\partial U / \partial \tau = \text{const}$. Эту новую постоянную можно выразить через J_∞ (а значит, в конечном итоге через T_∞) следующим образом. Интегрируя обе части (16) по x от 0 до d , получим:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{d} \cdot \left[a_m \frac{\partial U}{\partial x}(x, \tau) + a_m \delta \frac{\partial T}{\partial x}(x, \tau) \right] \Bigg|_{x=0}^{x=d}.$$

Применяя теперь при подстановке пределов интегрирования краевое условие (18), где нужно положить $J(\tau) = \text{const} = J_\infty$, и краевое условие (21), получим:

$$\partial U / \partial \tau = -J_\infty / (\rho_0 d). \quad (25)$$

Величину $\partial U / \partial \tau$ принято называть *скоростью сушки*.

Уточним теперь представление о характере излучения. Будем считать, что оно индуцирует внутри пластины источники тепла, распределенные по *экспоненциальному* закону:

$$W = S[(1 - R)/\Delta] \cdot \exp(-x/\Delta). \quad (26)$$

где S – интенсивность излучения; R – коэффициент отражения; Δ – глубина проникновения электромагнитного поля в материал.

Вернемся к исходным уравнениям распространения тепла и влаги (15) и (16). Принимая во внимание (25) и (26), после преобразований получим новый вид этих уравнений:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = C_1^T - C_2^T \cdot \exp(-x/\Delta); \quad C_1^T \equiv \frac{\gamma r J_\infty (T_\infty)}{\lambda d}; \quad C_2^T \equiv \frac{S(1-R)}{\lambda \Delta}; \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = C_1^U - C_2^U \cdot \exp(-x/\Delta); \quad C_1^U \equiv -\delta C_1^T - \frac{J_\infty (T_\infty)}{a_m \rho_0 d}; \quad C_2^U = -\delta C_2^T. \quad (28)$$

Найдем отсюда $T(x)$ и $U(x, \tau)$. Дважды интегрируя первое из уравнений (27), получим:

$$T(x) = C_1^T x^2 / 2 - C_2^T \Delta^2 \cdot \exp(-x/\Delta) + Ax + B.$$

Для нахождения постоянных A и B будем использовать условия $dT/dx (d) = 0$ и $T(0) = T_\infty$. Определив с их помощью A и B , получим температурное поле в следующем виде:

$$T(x) = C_1^T d^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{d} \right)^2 - \frac{x}{d} \right] + C_2^T \Delta^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{x}{\Delta}\right) - \frac{x}{\Delta} \exp\left(-\frac{d}{\Delta}\right) \right] + T_\infty. \quad (29)$$

Аналогичным образом из (28) можно найти $U(x, \tau)$. Здесь необходимо сделать следующее замечание. Примем в расчет, что искомое решение отличается от решения задачи (15)–(22) и дает лишь его асимптотику при $\tau \rightarrow \infty$. Пусть $\tau_{\text{уст}}$ есть момент времени, начиная с которого с достаточной для практики точностью этим различием можно уже пренебречь. Тогда при $\tau > \tau_{\text{уст}}$ вид распределения $U(x, \tau)$ будет однозначно определяться уравнением (28), условием (25) и краевыми условиями $U(0, \tau_{\text{уст}}) = U_\infty$, $\partial U / \partial x (d, \tau) = 0$. Здесь принято, что в момент $\tau_{\text{уст}}$ влагосодержание на поверхности $x = 0$ равно некоторой величине U_∞ (определить эту величину, так же как и время установления $\tau_{\text{уст}}$, можно лишь с помощью численного эксперимента). Проведя необходимые вычисления, при $\tau > \tau_{\text{уст}}$ будем иметь:

$$U(x, \tau) = C_1^U d^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{d} \right)^2 - \frac{x}{d} \right] + C_2^U \Delta^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{x}{\Delta}\right) - \frac{x}{\Delta} \exp\left(-\frac{d}{\Delta}\right) \right] + U_\infty - \frac{J_\infty}{\rho_0 d} (\tau - \tau_{\text{уст}}). \quad (30)$$

В частном случае, когда излучение отсутствует (сушка является конвективной), стационарное распределение температуры (29) и мгновенные распределения влагосодержания (30) будут *параболическими*. Это следует из того, что при $S = 0$ будем иметь $C_2^T = C_2^U = 0$.

Другой случай параболических распределений получается, когда поле электромагнитных потерь W является не экспоненциальным, а *однородным*. Этот вариант исследован авторами в работах [1; 3; 5].

Рассчитаем теперь установившуюся температуру поверхности T_∞ , которая играет определяющую роль в полученных выше формулах. При $\tau \rightarrow \infty$ краевое условие теплообмена (17) будет выглядеть так:

$$Q_\infty(T_\infty) + r(1-\gamma) \cdot J_\infty(T_\infty) = \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(0).$$

Вычисляя $dT/dx(0)$ с помощью (29), будем иметь:

$$\frac{dT}{dx}(0) = -C_1^T d + C_2^T \Delta \cdot [1 - \exp(-d/\Delta)].$$

Подставляя это в предыдущее уравнение и заменяя C_1^T и C_2^T их значениями из (27), получим уравнение

$$Q_\infty(T_\infty) + rJ_\infty(T_\infty) = S(1-R)[1 - \exp(-d/\Delta)]. \quad (31)$$

Левая часть этого уравнения есть общая интенсивность потерь энергии за счет теплообмена с внешней средой и за счет превращения воды в пар (внутреннему парообразованию и испарению с поверхности отвечают слагаемые $\gamma r J_\infty$ и $(1-\gamma)r J_\infty$ соответственно), а правая часть – интенсивность поглощаемого пластиной потока электромагнитной энергии. Таким образом, уравнение (31) имеет смысл баланса энергетических потоков в условиях нашей задачи. Так как температурное поле является стационарным, затраты на нагревание в этот баланс не входят. С учетом формул (23) и (24) для Q_∞ и J_∞ соотношение (31) превращается в трансцендентное уравнение для нахождения установившейся температуры поверхности T_∞ .

Таким образом, для построения асимптотического решения нужно сначала найти температуру T_∞ , решив уравнение (31), а затем по имеющимся формулам рассчитать характеристики процесса Q_∞ , J_∞ , $\partial U/\partial \tau$, $T(x)$ и $U(x, \tau)$. Заметим, что $\partial U/\partial \tau$ есть постоянная, а производные по времени от остальных функций равны нулю; согласно терминологии, принятой в математической физике, асимптотические решения полученного типа следует называть квазистационарными.

Найденное решение по построению удовлетворяет всем соотношениям (14), то есть оно находится в полном согласии с закономерностями периода постоянной скорости сушки. Доказательство существования такого решения и было поставлено целью настоящего пункта.

ПРИМЕЧАНИЕ

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-08-97040-р_поволжье_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев, А. М. Задача о сушке шара электромагнитным излучением / А. М. Афанасьев, Б. Н. Сипливый // Инженерно-физический журнал. – 2013. – Т. 86, № 2. – С. 322–330.
2. Афанасьев, А. М. Математическое моделирование теплового воздействия интенсивного СВЧ-излучения на цилиндрические водосодержащие объекты слоистой структуры / А. М. Афанасьев,

В. В. Подгорный, Б. Н. Сипливый, В. В. Яцышен // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2001. – Т. 4, № 2. – С. 15–21.

3. Афанасьев, А. М. Оптимизация процесса электромагнитной сушки капиллярно-пористых материалов / А. М. Афанасьев, Б. Н. Сипливый // Известия вузов. Электромеханика. – 2006. – № 5. – С. 3–10.

4. Афанасьев, А. М. Расчет теплового воздействия СВЧ излучения на плоские водосодержащие объекты слоистой структуры / А. М. Афанасьев, В. В. Подгорный, Б. Н. Сипливый, В. В. Яцышен // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 1998. – Т. 1, № 2–3. – С. 83–90.

5. Афанасьев, А. М. Теория электромагнитной сушки: асимптотическое решение начально-краевой задачи для цилиндра / А. М. Афанасьев, Б. Н. Сипливый // Теоретические основы химической технологии. – 2014. – Т. 48, № 2. – С. 222–227.

6. Кокодий, Н. Г. Тепловые процессы в капиллярно-пористых телах с внутренними и внешними источниками тепла / Н. Г. Кокодий, В. И. Холодов // Инженерно-физический журнал. – 2000. – Т. 73, № 6. – С. 1145–1151.

7. Лыков, А. В. Теория сушки / А. В. Лыков. – М.; Л.: Энергия, 1968. – 471 с.

8. Лыков, А. В. Тепломассообмен: справочник / А. В. Лыков. – М.: Энергия, 1978. – 480 с.

9. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.

REFERENCES

1. Afanasyev A.M., Siplivyy B.N. Zadacha o sushke shara elektromagnitnym izlucheniem [The Problem of Drying the Ball by Electromagnetic Radiation]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 2013, vol. 86, no. 2, pp. 322-330.

2. Afanasyev A.M., Podgornyy V.V., Siplivyy B.N., Yatsyshen V.V. Matematicheskoe modelirovanie teplovogo vozdeystviya intensivnogo SVCh izlucheniya na tsilindricheskie vodosoderzhashchie obyektuy sloistoy struktury [Mathematical Modeling of the Thermal Effects of Intense Microwave Radiation on the Cylindrical Slurry Objects With Layered Structure]. *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy*, 2001, vol. 4, no. 2, pp. 15-21.

3. Afanasyev A.M., Siplivyy B.N. Optimizatsiya protsessa elektromagnitnoy sushki kapillyarno-poristykh materialov [Optimizing the Process of Electromagnetic Drying of Capillary and Porous Materials]. *Izvestiya vuzov. Elektromekhanika*, 2006, no. 5, pp. 3-10.

4. Afanasyev A.M., Podgornyy V.V., Siplivyy B.N., Yatsyshen V.V. Raschet teplovogo vozdeystviya SVCh izlucheniya na ploskie vodosoderzhashchie obyektuy sloistoy struktury [Calculation of Thermal Effects of Microwave Radiation on Flat Water Containing Objects With Layered Structure]. *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy*, 1998, vol. 1, no. 2-3, pp. 83-90.

5. Afanasyev A.M., Siplivyy B.N. Teoriya elektromagnitnoy sushki: asimptoticheskoe reshenie nachalno-kraevoy zadachi dlya tsilindra [The Theory of Electromagnetic Drying: the Asymptotic Solution of the Initial-Boundary Value Problem for a Cylinder]. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii*, 2014, vol. 48, no. 2, pp. 222-227.

6. Kokodiy N.G., Kholodov V.I. Teplovye protsessy v kapillyarno-poristykh telakh s vnutrennimi i vneshnimi istochnikami tepla [Thermal Processes in Capillary and Porous Bodies With Internal and External Heat Sources]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 2000, vol. 73, no. 6, pp. 1145-1151.

7. Lykov A.V. *Teoriya sushki* [Theory of Drying]. Moscow, Energiya Publ., 1968. 471 p.

8. Lykov A.V. *Teplomassoobmen: Spravochnik* [Heat and Mass Transfer: A Handbook]. Moscow, Energiya Publ., 1978. 480 p.

9. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 724 p.

**MATHEMATICAL MODEL OF ELECTROMAGNETIC DRYING
WITH BOUNDARY CONDITIONS OF MASS TRANSFER
ON THE BASIS OF DALTON'S LAW OF EVAPORATION**

Afanasyev Anatoliy Mikhaylovich

Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Information Security,
Volgograd State University
alkiona111@yandex.ru, infsec@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Siplivyy Boris Nikolaevich

Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Theoretical Physics and Wave Processes,
Volgograd State University
tf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. The drying electromagnetic waves with boundary conditions of mass transfer are analyzed on the basis of the laws of Newton and Dalton. In the Newton's model the rate of moisture evaporation from the surface of the sample is proportional to the difference between the current moisture content on the surface and the equilibrium moisture content of material. In the Dalton's model the evaporation rate is proportional to the difference of partial pressure of water vapor through the thickness of the boundary layer. Under conditions of Newton's intensity drying there is a function of moisture content on the surface, and under the conditions of Dalton – the temperature function is on this surface. It is shown that the mass transfer by Newton's law leads to a contradiction of the regularity of the period of constant drying rate. In contrast, the use of boundary conditions of mass transfer on the basis of Dalton's law of evaporation leads to a complete accordance with the experiment. This statement is proved by the direct construction of solutions of initial-boundary value problem for the fields of temperature and moisture content during the electromagnetic drying of the plate.

Key words: mathematical modeling, electromagnetic drying, Dalton's law of evaporation, period of constant drying rate.