

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ И НЕПРОЗРАЧНОСТИ НА УСЛОВИЯ РАЗВИТИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ МОД В ТОНКОМ АККРЕЦИОННОМ ДИСКЕ

А.В. Хоперсков, С.С. Храпов

Рассмотрена модель тонкого газового диска во внешнем гравитационном потенциале. Для нее записана полная самосогласованная система газодинамических уравнений. Изучена динамика малых неосесимметричных возмущений в тонком газовом диске с учетом диссипативных эффектов (учитывается первая и вторая вязкости, коэффициент непрозрачности с произвольными зависимостями от поверхностной плотности σ вещества и полутолщины h диска). Показано, что от выбора моделей вязкости и непрозрачности сильно зависят динамика малых колебаний в тонком газовом диске, возможность и условия развития неустойчивостей.

Введение

Аккреционные диски (АД) являются важными элементами многих наблюдаемых астрофизических объектов (тесные двойные системы, квазары, молодые звезды). Во многих случаях можно считать, что АД являются тонкими. Для понимания ряда наблюдаемых эффектов следует предположить наличие турбулентной вязкости [1,2]. Физический механизм турбулентной вязкости может быть связан с развитием неустойчивостей. Характерной чертой аккрецирующих систем является наблюдаемый широкий спектр нестационарных проявлений. Особый интерес связан с открытием КПО и многочисленными попытками объяснить этот феномен динамикой возмущений во внутренних областях аккреционных дисков [3,4,5]. Часть из них может быть связана с развитием до нелинейной стадии различных неустойчивостей.

В рамках двумерных моделей без самогравитации и магнитного поля имеется четыре моды колебаний (две акустических, тепловая и вязкая). Характерной особенностью разработанных к настоящему времени моделей АД является зависимость коэффициента динамической вязкости $\eta = \sigma \nu$ (ν — кинематическая вязкость) от термодинамических величин, в частности от поверхностной плотности σ и температуры T . В результате на динамику волн оказывает влияние возмущение динамической вязкости. Этот фактор является решающим и приводит при некоторых дополнительных условиях к неустойчивым решениям всех четырех мод. По-видимому, одной из первых, была исследована тепловая мода колебаний [2]. Для стандартной α -модели АД Шакуры и Сюняева тепловая и вязкая неустойчивые моды были подробно исследованы [6]. В радиационно-доминирующей области диска [$\beta = P_r / (P_r + P_g) > \beta_{crit} = 3/5$] нарастают обе ветви колебаний. Критическое значение параметра β_{crit} очень чувствительно к закону вязкости. Исследование модифицированных α -моделей, в которых вязкость пропорциональна не полному давлению, а газовому [$W_{r\varphi} = -\alpha(1 - \beta)^{N/2} 2hP$, $P = P_r + P_g$, $N = const$], говорит об их устойчивости даже в радиационно-доминирующей области при $N > 8/7$ [7,8].

В ряде работ [3,8,9,10] было показано наличие неустойчивых акустических ветвей колебаний. Существенным отличием данного типа колебаний является то, что они могут быть неустойчивыми при любых значениях параметра $0 \leq \beta \leq 1$ [10]. Причиной развития неустойчивости акустической волны является совместное действие двух факторов: сильная дифференциальность вращения и возмущение динамической вязкости. Имеется универсальный стабилизирующий механизм, так же обусловленный действием вязкости. В случае преобладания упругой вязкости μ над сдвиговой ν происходит стабилизация [10].

В данной заметке рассмотрена динамика малых неосесимметричных возмущений в плоскости тонкого газового диска с учетом диссипативных факторов (излучения и вязкости). Исследован вопрос о влиянии закона непрозрачности на условия развития и параметры неустойчивых мод в оптически толстом АД. Подробно изучен вопрос о влиянии второй (упругой) вязкости на диссипативно-звуковую неустойчивость.

Основные уравнения

Будем исходить из модели тонкого неосесимметричного газового диска, описываемого двумерными уравнениями газодинамики в полярной системе координат:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div}(\sigma \vec{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla})u - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p}{\sigma \partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} - D \frac{p}{\sigma} \frac{d \ln \Omega_*}{dr} + \frac{\partial r W_{rr}}{\sigma r \partial r} + \frac{\partial W_{r\varphi}}{\sigma r \partial \varphi} - \frac{W_{\varphi\varphi}}{\sigma r}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla})v + \frac{uv}{r} = -\frac{\partial p}{\sigma r \partial \varphi} + \frac{\partial r^2 W_{r\varphi}}{\sigma r^2 \partial r} + \frac{\partial W_{\varphi\varphi}}{\sigma r \partial \varphi}, \quad (3)$$

где $\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial ru}{r \partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \varphi}$, u и v — соответственно радиальная и азимутальная компоненты скорости; $\sigma = 2h\rho$ — поверхностная плотность, $p = 2hP$ — поверхностное давление, h — полутолщина диска, P и ρ — соответственно средние по z -координате давление и плотность. Компоненты тензора вязких напряжений для двумерного случая равны $W_{rr} = 2\eta \frac{\partial u}{\partial r} + (\zeta - \eta)\operatorname{div}(\vec{v})$, $W_{r\varphi} = \eta \left(\frac{\partial u}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)$, $W_{\varphi\varphi} = 2\eta \left(\frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) + (\zeta - \eta)\operatorname{div}(\vec{v})$, где $\eta = \sigma\nu$, $\zeta = \sigma\mu$, ν и μ — соответственно первая и вторая кинематическая вязкость. Параметр D определяется зависимостью термодинамических величин от z -координаты.

Без учета самогравитации рассматриваем газ во внешнем гравитационном поле $\Psi(r, z)$, для тонкого диска можно считать

$$\Psi(r, z) \simeq \Phi(r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} z^2 = \Phi(r) + \frac{1}{2} \Omega_*^2(r) z^2, \quad (4)$$

где Ω_* в случае центрального объекта массы M_1 совпадает с кеплеровской угловой скоростью $\Omega = \sqrt{GM_1/r^3}$.

Баланс энергии для тонкого газового диска с учетом диссипативных факторов определяется уравнением

$$\frac{\partial(Eh)}{\partial t} + P \frac{dh}{dt} + \operatorname{div}[\vec{v}h(E + P)] - \vec{v} \vec{\nabla}(Ph) = Q^+ - Q^-, \quad (5)$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \vec{\nabla}$, Q^+ и Q^- — соответственно энергия, выделяющаяся в единицу времени на единице площади за счет вязкой диссипации и уносимая с поверхности АД излучением. Для Q^+ имеем:

$$Q^+ = \frac{1}{2} \frac{W_{r\varphi}^2}{\sigma \nu}. \quad (6)$$

Средняя плотность тепловой энергии в слое $E(r, \varphi, t)$ связана с газовым $P_g(r, \varphi, t)$ и радиационным давлением $P_r(r, \varphi, t)$ соотношением

$$E = \frac{P_g}{\gamma - 1} + 3P_r = \frac{1 + \beta(3\gamma - 4)}{\gamma - 1} P, \quad (7)$$

где $\beta = \frac{P_r}{P} = \frac{P_r}{P_r + P_g}$ — доля давления излучения в полном давлении, γ — объемный показатель адиабаты. Для плазмы, состоящей из полностью ионизованного водорода, в случае локального термодинамического равновесия $P_g = \frac{2k}{m_p} \rho T$, $P_r \simeq \frac{1}{3} a T^4$ (здесь k и a — соответственно постоянные Больцмана и излучения).

Для оптически толстого диска можно записать:

$$Q^- = \frac{2}{3} \frac{acT^4}{\bar{\kappa} \sigma}, \quad (8)$$

здесь c — скорость света, $\bar{\kappa}$ — непрозрачность.

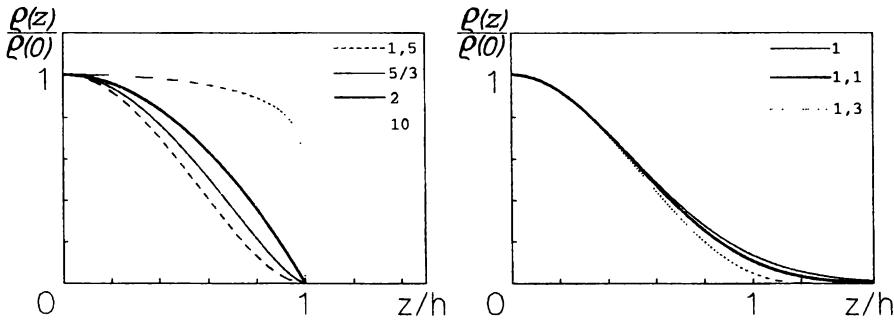


Рис. 1. Зависимость объемной плотности вещества от z -координаты для политропной модели. Числа указывают значения параметра ℓ

Модель тонкого газового слоя предусматривает наличие в каждый момент времени гидростатического равновесия в вертикальном направлении:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\Omega_*^2 z. \quad (9)$$

Для интегрирования (9) необходимо учитывать структуру диска в z -направлении, которая определяется уравнением состояния $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\rho, \epsilon)$ и переносом энергии. Тогда уравнение (9) можно проинтегрировать:

$$p = 2hP = c^2 \Omega_*^2 \sigma h^2, \quad (10)$$

где безразмерный параметр c^2 зависит от детального z -распределения плотности и давления.

Например, для политропного закона $\mathcal{P}(z) \propto [\rho(z)]^\ell$ ($\ell = \text{const}$) имеем

$$\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}(0) \left[1 - A(\ell) \frac{z^2}{h^2} \right]^{\frac{\ell}{\ell-1}}, \quad \rho(z) = \rho(0) \left[1 - A(\ell) \frac{z^2}{h^2} \right]^{\frac{1}{\ell-1}}, \quad (11)$$

$$c^2 = \int_0^1 (1 - z^2)^{\ell/(\ell-1)} dz / B(\ell) \int_0^1 (1 - z^2)^{1/(\ell-1)} dz, \quad (12)$$

где

$$h^2 = \frac{B(\ell) \mathcal{P}(0)}{\rho(0) \Omega_*^2}, \quad A(\ell) = \begin{cases} 2(\ell-1) & , \ell \leq 3/2 \\ 1 & , \ell \geq 3/2 \end{cases}, \quad B(\ell) = \begin{cases} 4\ell & , \ell \leq 3/2 \\ \frac{2\ell}{\ell-1} & , \ell \geq 3/2 \end{cases}.$$

На рис. 1 показаны распределения плотности в вертикальном направлении при различных значениях параметра ℓ . При $|z| = h$ плотность обращается в ноль либо выполняется условие $\int_0^h \rho dz \gg \int_h^\infty \rho dz$. Величина h при таком определении играет роль эффективной полутолщины диска. В пределе $\ell \rightarrow \infty$ выполняется $\rho = \text{const}$ при $|z| \leq h$ и получаем $c^2 = 1/3$, другой предельный случай $\ell \rightarrow 1$ соответствует изотермическому закону $\mathcal{P}(z) \propto \rho(z) \propto \exp(-2z^2/h^2)$ и $c^2 = 1/4$.

Отметим, что уравнение (10) лежит в основе α -модели аккреционных дисков (как стационарных [1], так и нестационарных [11]).

Дисперсионное уравнение

Рассмотрим динамику малых неосесимметричных возмущений с волновым вектором $\vec{k} = \{k_r, k_\varphi\}$ в плоскости тонкого газового диска. Ограничимся коротковолновыми возмущениями, что позволяет воспользоваться ВКБ-приближением $k_r L \gg 1$ ($L = \min\{|d \ln \Omega / dr|^{-1}, |d \ln \Omega_* / dr|^{-1}, |d \ln \sigma_0 / dr|^{-1}, |d \ln p_0 / dr|^{-1}, |d \ln h_0 / dr|^{-1}\}$) и искать решение в виде:

$$\tilde{f} = f_1 \exp\{-i\omega t + ikr + im\varphi\}, \quad (13)$$

где $f_1 = \{\sigma_1, p_1, h_1, u_1, v_1, \beta_1\}$, ω — собственная частота колебаний, $k \equiv k_r$, $m = rk_\varphi$ — номер моды по азимуту ($k_\varphi \ll k_r$). Равновесные величины будем пометать индексом "0". Использование модели тонкого диска накладывает дополнительные условия на длину волны исследуемых возмущений $\lambda \gg 2h_0$ ($\lambda = 2\pi/k$).

В рамках ВКБ-анализа вклад градиентов равновесных величин мал, и в этом случае учет наличия равновесной радиальной скорости u_0 приводит к доплеровскому сдвигу частоты ($\omega \rightarrow \omega - ku_0$). Это дает малую поправку к реальной части частоты для звуковой волны. Вычисления [3,8,9] показывают, что для докритического темпа аккреции ($\dot{m} = \dot{M}/\dot{M}_{crit} \leq 1$) инкремент неустойчивостей очень слабо зависит от параметра \dot{m} . Следует отметить, что при $\dot{m} \geq 1$ может нарушаться приближение тонкого диска.

Считаем, что в общем случае первая кинематическая вязкость ν и непрозрачность $\bar{\kappa}$ являются функциями σ и h (другими словами, плотности и температуры), тогда в линейном приближении

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = \delta_\sigma \frac{\sigma_1}{\sigma_0} + \delta_h \frac{h_1}{h_0}, \quad \left\{ \delta_\sigma = \left(\frac{d \ln \nu}{d \ln \sigma} \right)_0, \quad \delta_h = \left(\frac{d \ln \nu}{d \ln h} \right)_0 \right\}, \quad (14)$$

$$\frac{\bar{\kappa}_1}{\bar{\kappa}_0} = \Delta_\sigma \frac{\sigma_1}{\sigma_0} + \Delta_h \frac{h_1}{h_0}, \quad \left\{ \Delta_\sigma = \left(\frac{d \ln \bar{\kappa}}{d \ln \sigma} \right)_0, \quad \Delta_h = \left(\frac{d \ln \bar{\kappa}}{d \ln h} \right)_0 \right\}. \quad (15)$$

Подставляя решения вида (13) в линеаризованную систему уравнений (1)-(3), (5), получаем систему алгебраических уравнений, условие существования нетривиальных решений которой приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$\hat{W}^4 - i\hat{W}^3 \{S_1 - \alpha_1(2 + \alpha_0)K^2\} - \hat{W}^2 \{2(2 - n) + S_2K^2 + \alpha_1^2(1 + \alpha_0)K^4\} + \\ + i\hat{W} \{2(2 - n)S_1 + S_3K^2 + S_4K^4\} - K^2(S_5 + S_6K^2) = 0, \quad (16)$$

где введены безразмерные величины $\hat{W} = \omega/\Omega - m$, $K = kh_0$, $n = -d \ln \Omega / d \ln r$, $\alpha_1 = \nu_0/\Omega h_0^2$, $\alpha_0 = \mu_0/\nu_0$, $S_1 = A_5/A_2$, $S_2 = c^2 + [y_2 A_6 - 2A_0 c^2 - \alpha_1(2 + \alpha_0)A_5]/A_2$, $S_3 = [A_5 c^2 - 2y_1 A_2 + 2y_2 A_0 + 2(2 - n)c^2 A_6 - 2c^2 A_4]/A_2$, $S_4 = [\alpha_1^2(1 + \alpha_0)A_5 - c^2 \alpha_1 A_2 - \alpha_1(1 + \alpha_0)y_2 A_6 + 2c^2 \alpha_1 A_0]/A_2$, $S_5 = 2[y_1 A_5 - y_2 A_4]/A_2$, $S_6 = [\alpha_1 A_5 c^2 - c^2 y_2 A_6 + 2c^2 y_1 A_6 - 2c^2 \alpha_1 A_4]/A_2$. $y_1 = n\alpha_1(1 + \delta_\sigma)$, $y_2 = n\alpha_1 \delta_h$, $A_1 = 1 + 3\beta_0 + 4(3\gamma - 4)\beta_0^2$, $A_2 = (1 + 3\beta_0)(1 + \gamma) + (3\gamma - 4)\beta_0(9 - \beta_0)$, $A_3 = [\beta_0(3\gamma - 4) + \gamma](1 + 3\beta_0)$. $A_0 = A_1 - A_3$, $A_4 = \frac{n}{2} A_6 \left[\delta_\sigma - \frac{4\beta_0}{1 + 3\beta_0} - \Delta_\sigma \right]$, $A_5 = \frac{n}{2} A_6 \left[\delta_h - 4 \frac{2 - \beta_0}{1 + 3\beta_0} - \Delta_h \right]$, $A_6 = 2n(\gamma - 1)(1 + 3\beta_0)\alpha_1/c^2$.

Обсуждение результатов

Уравнение (16) описывает четыре ветви колебаний: две акустические [3,8,9,10], вязкую и тепловую [2,3,4,5]. Непосредственно из вида дисперсионного уравнения следует, что учет неосесимметричности ($m \neq 0$) не сказывается на значениях инкрементов неустойчивых мод, так как параметр m и собственная частота ω входят в уравнение (16) только в виде комбинации $\hat{\omega} = \omega - m\Omega$. Это приводит только к доплеровскому сдвигу собственной частоты колебаний, т.е. $\text{Re}(\hat{\omega}) = \text{Re}(\omega) - m\Omega$. В работе [18] было показано, что инкременты тепловой и вязкой мод зависят от параметра m , но используемое в данной работе тепловое уравнение было записано в некорректной форме (см. [13]). Таким образом, результат, полученный Мак-Ки (McKee) [18], является неверным.

Появление неустойчивых мод полностью связано с возмущением динамической вязкости $\eta = \sigma\nu$ и, следовательно, определяется зависимостью $\nu(\sigma, h)$. Если положить $\tilde{\eta} \equiv 0$, то все четыре ветви колебаний при любых значениях остальных параметров будут затухать с декрементом $\text{Im}(\hat{\omega}) \sim -\nu_0 k^2 < 0$.

Определим базовую модель следующим образом: $\gamma = 5/3$, $c^2 = 1/3$, $n = 3/2$, $\beta_0 = 0$, $\alpha_1 = 2/9$, $\alpha_0 = 0$, $\delta_\sigma = 0$, $\delta_h = 2$, $\Delta_\sigma = 0$, $\Delta_h = 0$. Если специально не указано, то параметры принимают базовые значения. На рис. 2 показано типичное поведение инкрементов всех четырех ветвей колебаний от безразмерного волнового числа $K = kh_0$.

С учетом диссипативных процессов ($\alpha_1 > 0$) обе акустические моды при любых значениях параметра $0 \leq \beta_0 \leq 1$ могут быть неустойчивыми в случае $\alpha_0 = \mu_0/\nu_0 = 0$. В работе [10] отмечалось, что с ростом величины второй вязкости (с увеличением α_0) инкремент такой диссипативно-звуковой неустойчивости уменьшается до тех пор, пока при $\alpha_0 = \alpha_{0crit}$ мнимая часть не обращается в нуль. При $\alpha_0 > \alpha_{0crit}$ возмущения затухают [$\text{Im}(\hat{\omega}) < 0$]. Это связано с тем, что вторая вязкость дает обычный стабилизирующий эффект ($\sim i\mu_0 k^2$), дестабилизация от возмущения вязкости $\tilde{\mu}$ мала, т.к. $|\tilde{\mu} \frac{d^2 u_0}{dr^2}| \ll |\mu_0 k^2 \tilde{u}|$ в силу $(kr)^2 \gg 1$.

Величина α_1 определяет уровень турбулентности и с точностью до численного коэффициента порядка единицы совпадает с параметром α . Для стандартной α -модели [1] $\alpha_1 = \frac{c^2}{n}\alpha$. В случае

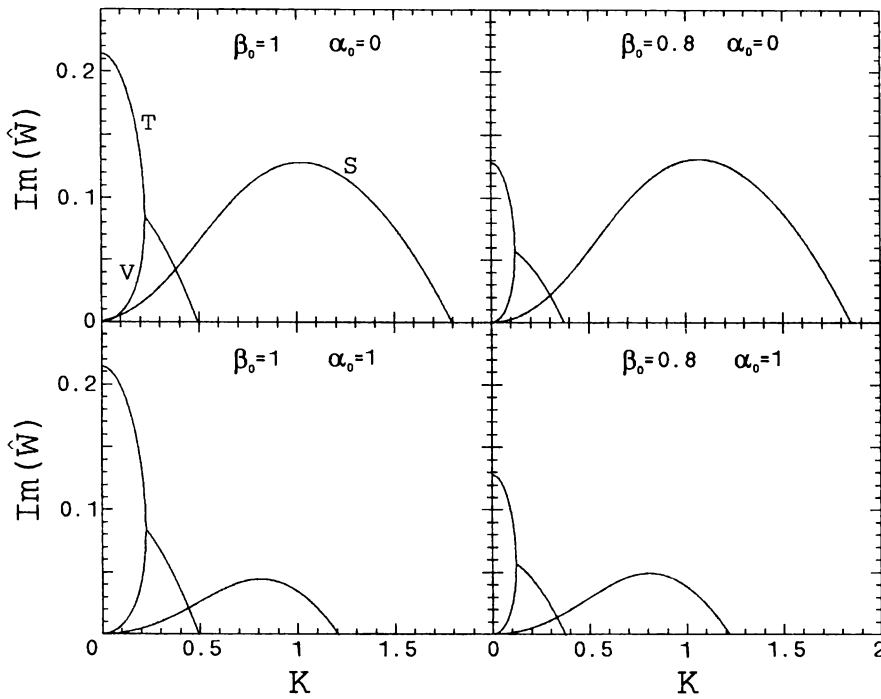


Рис. 2. Зависимость мнимой части частоты $\text{Im}(\hat{W})$ от волнового числа $K = kh_0$ при различных значениях параметров β_0 и α_0 (Т — тепловая мода, V — вязкая мода, S — акустические колебания)

модифицированных α -моделей с $W_{r\varphi} = -\alpha(1-\beta)^{N/2}p$ ($N = \text{const}$) $\alpha_1 = \alpha \frac{c^2}{n}(1-\beta_0)^{N/2}$, для $W_{r\varphi} = -\alpha p$ с $\alpha = (h/r)^N$ имеем $\alpha_1 = \frac{c^2}{n}(h_0/r)^N$. Значения инкрементов тепловой и вязкой мод монотонно возрастают с ростом α_1 . Отметим эффект стабилизации акустических волн при аномально больших значениях параметра $\alpha_1 = \nu_0/\Omega h_0^2$; в частности, возмущения с $kh_0 \simeq 1$ устойчивы при $\alpha_1 \gtrsim 1$ [10], однако в рамках стандартной модели аккреционного диска следует ограничиться $\alpha_1 \lesssim 1$.

На рис. 3 приведены границы устойчивости акустических колебаний на плоскости параметров $K - \alpha_0$ при различных значениях α_1 и β_0 . Вычисления показывают, что значение $\alpha_{0\text{crit}}$ существенно зависит от параметров α_1, β_0, K . Обнаруживается немонотонная зависимость от этих параметров. Вторая вязкость стабилизирует в первую очередь коротковолновые возмущения. Наличие радиационного давления увеличивает значения $\alpha_{0\text{crit}}$ и при $\beta_0 = 1$ имеется область длин волн, которые неустойчивы при любых значениях второй вязкости в случае $\alpha_1 \simeq 1$.

Выбор закона непрозрачности оказывает сильное влияние на условия развития неустойчивых мод колебаний. В случае томсоновского рассеяния на электронах $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{es} = 0,4 \text{ см}^2/\text{г}$ ($\Delta_\sigma = 0, \Delta_h = 0$), для закона Крамерса $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{ff} \propto \rho T^{-7/2}$ ($\Delta_\sigma = 1, \Delta_h = -8$). Для низкотемпературных протопланетных дисков $\bar{\kappa} \propto T^2$ [12] ($\Delta_\sigma = 0, \Delta_h = 4$). В "горячем" пределе модели Фолкнера и др. [13] $\bar{\kappa} \propto \rho T^{-5/2}$ ($\Delta_\sigma = \frac{2+\beta_0}{2(1+3\beta_0)}, \Delta_h = -\frac{12+\beta_0}{2(1+3\beta_0)}$), а в "холодном" — $\bar{\kappa} \propto \rho^{1/3} T^{10}$ ($\Delta_\sigma = 1/3, \Delta_h = 59/3$).

На рис. 4, 5 показаны зависимости мнимой части собственной частоты тепловой/вязкой и акустической мод от значений параметров Δ_σ, Δ_h . Из рис. 4 следует, что тепловая мода неустойчива при больших отрицательных значениях параметра Δ_σ . Напротив, акустические колебания заведомо неустойчивы при положительных значениях величины Δ_σ . Наиболее интересным результатом является то, что тепловая мода может быть неустойчивой при доминировании газового давления ($\beta_0 = 0$), т.е. во внешней области диска. Зависимость $\hat{W}(\Delta_h)$ обнаруживает достаточно сложный характер (см. рис. 5). Отметим, что с ростом параметра Δ_h инкремент тепловой неустойчивости может достигать больших значений ($\text{Im}(\hat{\omega}) > \Omega$). В рамках стандартной модели аккреционного диска [1] акустические колебания оказываются неустойчивыми как во внутренней радиационно-доминирующей области ($P_r \gg P_g, \bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{es}$), так и во внешней газовой зоне ($P_g \gg P_r, \bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{ff}$).

От параметров δ_σ и δ_h также весьма сильно зависят значения инкрементов и условия развития неустойчивостей. К настоящему моменту предложено большое число моделей турбулентной вязкости с различными значениями величин δ_σ, δ_h . В частных случаях для стандартной α -модели

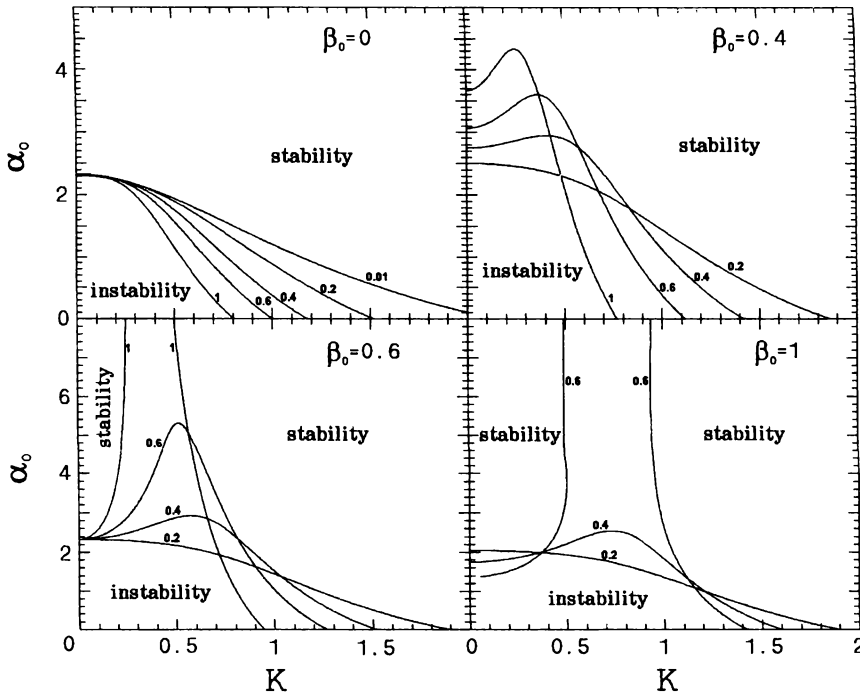


Рис. 3. Границы устойчивости акустических колебаний на плоскости $K - \alpha_0$. Числа указывают значения параметра α_1

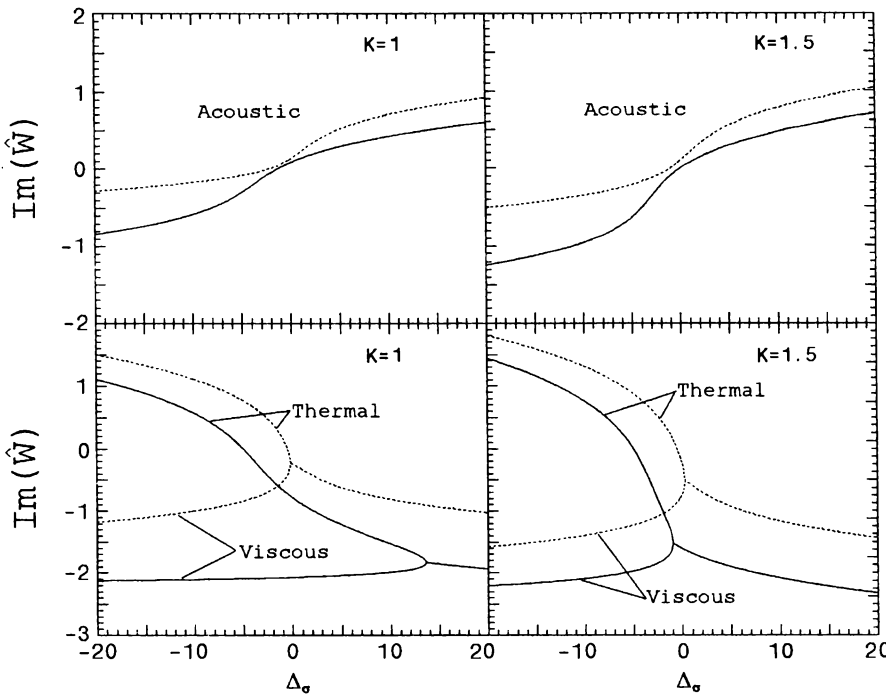


Рис. 4. Зависимость мнимой части частоты тепловой, вязкой и акустической мод от параметра $\Delta\sigma$. Сплошная линия соответствует $\beta_0 = 0$, пунктирная — $\beta_0 = 1$

— $W_{r\varphi} = -\alpha p$ [1] — имеем $\nu \sim \alpha \Omega h^2$ и $\delta_\sigma = 0$, $\delta_h = 2$. В случае хаотических магнитных полей — $W_{r\varphi} = -\alpha p_g$ [2] — получаем $\delta_\sigma = \frac{\beta_0}{1+3\beta_0}$ ($0 \leq \delta_\sigma \leq 1/4$), $\delta_h = \frac{2-\beta_0}{1+3\beta_0}$ ($1/4 \leq \delta_h \leq 2$); в случае $W_{r\varphi} = -\alpha \sqrt{p p_g}$ [14] имеем $\delta_\sigma = \frac{\beta_0}{2(1+3\beta_0)}$ ($0 \leq \delta_\sigma \leq 1/8$), $\delta_h = \frac{4+5\beta_0}{2(1+3\beta_0)}$ ($9/8 \leq \delta_h \leq 2$); в более общем случае — $W_{r\varphi} = -\alpha(p_g/p)^{N/2} p$ ($N = \text{const}$) [7] — следует $\delta_\sigma = \frac{N\beta_0}{2(1+3\beta_0)}$; $\delta_h = \frac{4+\beta_0(12-7N)}{2(1+3\beta_0)}$. Следует упомянуть работу [15], в которой рассматривалось выражение $W_{r\varphi} = -\alpha p$ с $\alpha = (h/r)^N$, т.е. $\delta_\sigma = 0$, $\delta_h = 2 + N$. В случае возникновения бароклиной неустойчивости может развиваться турбулентность с $\alpha \propto (h/r)^2$ [16]. При наличии генерации магнитного поля связь $W_{r\varphi}(p)$ может быть более сложной [17].

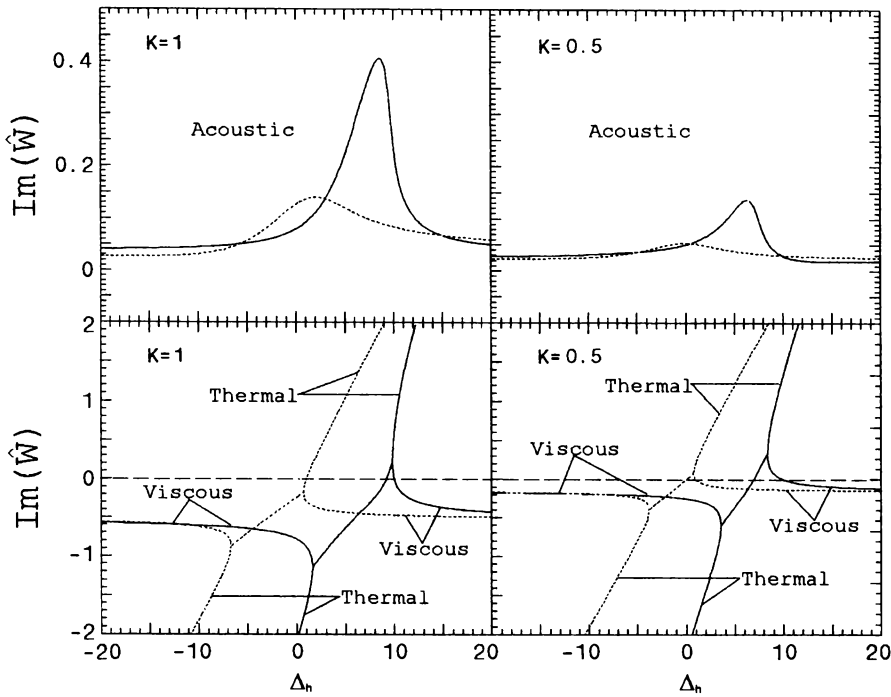


Рис. 5. Зависимость мнимой части частоты тепловой, вязкой и акустической мод от параметра Δ_h . Сплошная линия соответствует $\beta_0 = 0$, пунктирная — $\beta_0 = 1$

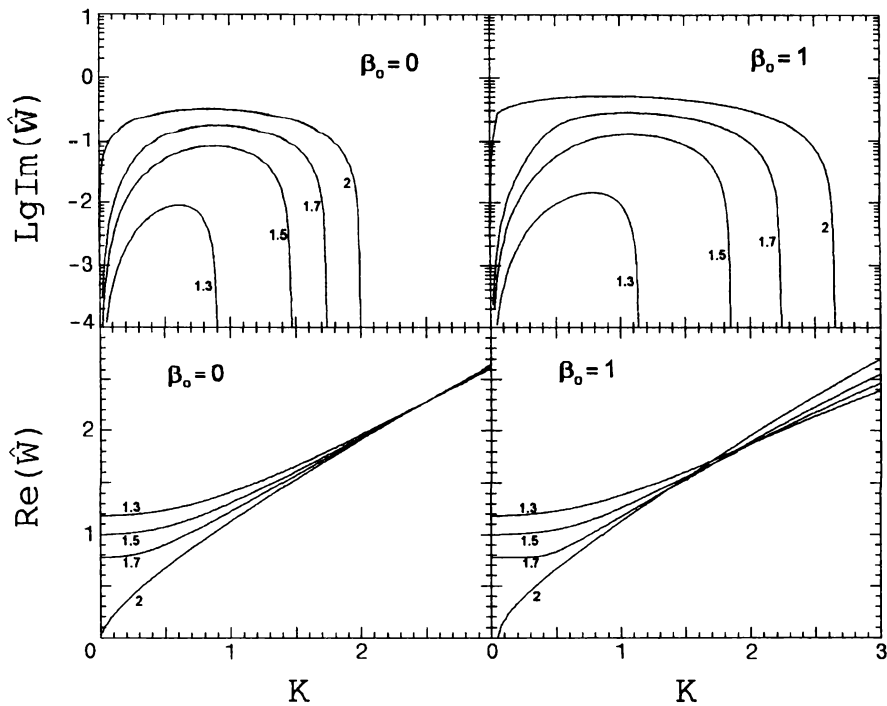


Рис. 6. Зависимость собственной частоты акустических колебаний от волнового числа K при различных значениях параметра n (числа на рисунке)

Для акустических и тепловой/вязкой ветвей колебаний функции $\text{Im}[\hat{W}(\delta_\sigma)]$ и $\text{Im}[\hat{W}(\delta_h)]$ качественно близки соответственно к $\text{Im}[\hat{W}(\Delta_\sigma)]$ и $\text{Im}[\hat{W}(\Delta_h)]$. В рамках рассмотренных выше моделей турбулентной вязкости, акустические колебания оказываются неустойчивыми при $\alpha_0 < \alpha_{0\text{crit}}$. Отметим также, что диссипативно-звуковая неустойчивость имеет место и в модели $\delta_h = \delta_\sigma = 0$, в которой кинематическая вязкость (но не динамическая) не возмущается.

Дифференциальность вращения в диссипативном диске ответственна за неустойчивость всех четырех ветвей колебаний. Этот эффект следует из рассмотрения предельно простых моделей. В уравнении (3) ключевым для неустойчивости акустических мод является предпоследнее слагаемое с $W_{r\varphi}$. Рассмотрим, каким образом вязкая сила, обусловленная возмущением динамической вязкости $\tilde{\eta}$, приводит к росту амплитуды звуковой волны в плоскости диска. Пренебрегая кориолисовой силой, возмущением кинематической (но не динамической) вязкости и стабилизирующими вязкими

слагаемыми, нетрудно получить уравнение $\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\sigma}}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}}{\partial r^2} \right] = A \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}}{\partial r^2}$, где $A = 2\Omega^2 n \nu_0 > 0$, $c_s^2 = (1 + 2(\gamma - 1)/(\gamma + 1))p_0/\sigma_0$. Принимая во внимание линейность уравнения, получим $\omega[\omega^2 - c_s^2 k^2] = iAk^2$, что дает неустойчивость акустических мод с инкрементом $\text{Im}(\omega) \simeq \frac{ik^2 A}{2c_s^2 k^2} = \frac{i}{2} \frac{A}{c_s^2}$ и затухание энтропийных колебаний с декрементом $\text{Im}(\omega) \simeq -iA/c_s^2$. Данная оценка инкремента соответствует коротковолновому пределу, т.к. мы пренебрегли эциклическими колебаниями.

Как видим, степень дифференциальности ($n = -d \ln \Omega / d \ln r$) является определяющим фактором, влияющим на возможность развития обсуждаемых неустойчивостей (рис. 6). Как правило, равновесное давление уменьшается с увеличением радиуса, в этом случае параметр n может быть немного больше $3/2$. Если внешний потенциал не является точечным, как это имеет место для газовых галактических дисков, то $n < 3/2$. В частности, для плоской кривой вращения $n = 1$. Случай $n = 2$ соответствует предельно устойчивым круговым орбитам.

В заключение отметим, что дисперсионное уравнение (16) описывает динамику малых возмущений только пинч-слоя. Пинч-колебания не приводят к смещению центра масс в вертикальном направлении, и это учитывалось при выводе исходной системы уравнений тонкого слоя.

Summary

EFFECT OF VISCOSITY AND OPACITY ON THE CONDITIONS OF DEVELOPMENT OF UNSTABLE MODES IN A THIN ACCRETION-DISK

A.V. Khoperskov, S.S. Khrapov

The model of a thin gaseous disk in the external gravitational potential is considered. The dynamics of small nonaxisymmetric perturbations in a thin gaseous disk with dissipative effects is investigated. It is showed, that conditions of development and parameters of the instabilities in the thin gaseous disk are strongly depended on the models of viscosity and opacity.

Литература

1. Shakura N.I., Sunyaev R.A. // *Astron. and Astrophys.* 1973. V. 24. P. 337.
2. Lightman A.P., Eardley D.M. // *Astrophys. J.* 1974. V. 187. L. 1.
3. Wallinder F.H. // *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 1991. V. 253. P. 184.
4. Okuda T., Mineshige S. // *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 1991. V. 249. P. 684.
5. Wu X-B., Yang L-T. // *Astrophys. J.* 1994. V. 432. P. 672.
6. Shakura N.I., Sunyaev R.A. // *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 1976. V. 175. P. 613.
7. Szuszkiewicz E. // *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 1990. V. 244. P. 377.
8. Wallinder F.H. // *Astron. and Astrophys.* 1991. V. 249. P. 107.
9. Wallinder F.H. // *Astron. and Astrophys.* 1990. V. 237. P. 270.
10. Хоперсков А.В., Храпов С.С. Неустойчивость звуковых волн в тонком газовом диске // *Письма в астрономический журнал (ПАЖ)*. 1995. Т. 21. С. 388.
11. Bath G.T., Pringle J.E. // *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 1981. V. 194. P. 967.
12. Lin D.N.C. // *Astrophys. J.* 1981. V. 246. P. 972.
13. Foulkner J., Lin D.N.C., Papaloizou J. // *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 1983. V. 205. P. 359.
14. Taam R.E., Lin D.N.C. // *Astrophys. J.* 1984. V. 287. P. 761.
15. Mineshige S., Shields G.A. // *Astrophys. J.* 1990. V. 351. P. 47.
16. Knobloch E., Spruit H.C. // *Astron. and Astrophys.* 1986. V. 166. P. 359.
17. Horiuchi T., Kato S. // *Publ. Astron. Soc. Jap.* 1990. V. 42. P. 661.
18. McKee M.R. // *Astron. and Astrophys.* 1990. V. 235. P. 521.