

УДК 519.2

Т.А. Васильева, А.А. Рыжков

ФГАОУ ВПО «ВолГУ», Волгоград

ЧИСЛЕННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ФИНАНСОВЫХ ОПЦИОНОВ ТРИНОМИАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Аннотация. *Оценивание опционов в настоящее время является одной из наиболее важных и актуальных задач финансовых рынков. В работах авторов, О.Е. Васильевой и Д.Д. Зеленого[1-5] рассматривались численные методы Кранка-Никольсона и интегральных преобразований Меллина для оценивания Азиатских и Американских колл и пут опционов. Настоящая статья посвящена численному исследованию задачи вычисления стоимости опционов триномиальным методом. Триномиальный метод является аналогом биномиального, и состоит в построении триномиального дерева при прямом ходе метода. На втором этапе происходит обратный обход построенного дерева, в процессе которого и вычисляется стоимость опциона.*

Ключевые слова: *финансовая математика, опционы, колл, пут, биномиальный метод, триномиальный метод.*

1. Алгоритм оценивания Европейских опционов триномиальным методом.

Триномиальный метод состоит в построении триномиального дерева, отражающего разные варианты изменения цены акции S в течение срока действия опциона, и в последующем вычислении стоимости опциона с помощью обратного обхода дерева. Вероятность изменения цены опциона в данном методе непосредственно закладывается на этапе построения триномиального дерева. Этот этап называется *прямым ходом* (Рис. 1).

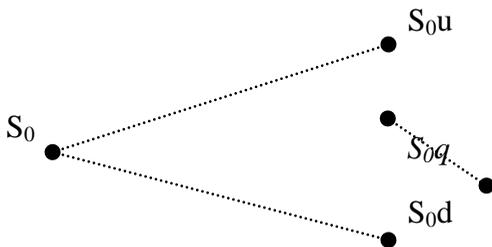


Рисунок 1 - Одноступенчатое триномиальное дерево.

Здесь $S=S_0$ - первоначальная цена акции (S_0 является корнем дерева). В дальнейшем цена может либо увеличиваться - Su , оставаться неизменной - Sq ($q=1$), либо уменьшаться - Sd . Здесь u – коэффициент увеличения, d – коэффициент уменьшения цены акции, вычисляемые по формулам

$$u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad d = \frac{1}{u} = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad (1)$$

где $\beta = \frac{1}{2} * (\frac{1}{\alpha} + \alpha * e^{\sigma^2 \Delta t})$, $\alpha = e^{r \Delta t}$

Поступая далее аналогично, получим триномиальное дерево, полученное в результате расчетов (Рис.2.). При программной реализации данного процесса количество шагов по времени равнялось M , а временной интервал T разбивался на промежутки $\Delta t = \frac{T}{M}$, $i = \overline{0, M}$. Для каждого разбиения по времени $t_i = i * \Delta t$ от 0 до M вычисляются значения цены акции S в узлах триномиального дерева по формуле

$$S_{ji} = S_0 u^j d^{i-j}, \quad \text{где } 0 \leq j \leq i, 0 \leq i \leq M. \quad (2)$$

На втором этапе происходит обратный обход построенного дерева, в ходе которого и вычисляется стоимость опциона. В зависимости от типа и стиля опциона используются различные формулы для нахождения его стоимости.

Для Европейских опционов в момент времени t_M цена опциона $V_{Eur}(S(t_M), t_M)$ вычисляется по формулам

$$V_{EurC}(S(t_M), t_M) = \max \{S(t_M) - K, 0\} \quad (3)$$

$$V_{EurP}(S(t_M), t_M) = \max \{K - S(t_M), 0\} \quad (4)$$

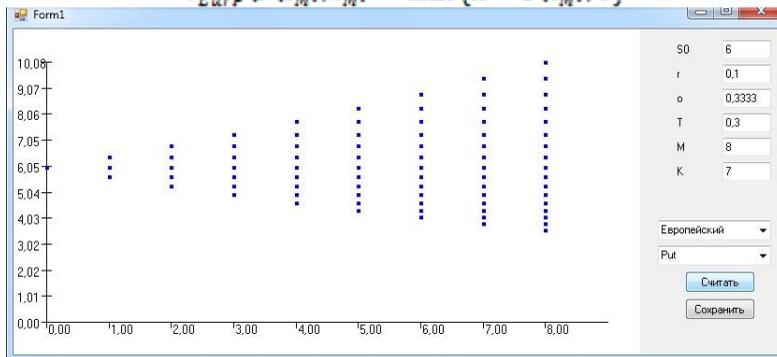


Рисунок 2 - Программа расчета опционов Visual Studio 2010 C#.

Здесь V_{EurC} – Европейский Колл опцион, V_{EurP} – Европейский Пут опцион, $S(t_M)$ – цена акции в момент исполнения, а K – цена исполнения. Из (3) и (4) получаем для Колл и Пут опционов

$$V_c^{Eur}{}_{jM} = \max \{S_{jM} - K, 0\} \quad \text{или} \quad V_c^{Eur}{}_{jM} = \max \{S_0 d^{M-j} u^j - K, 0\} \quad (5)$$

$$V_p^{Eur}{}_{jM} = \max \{K - S_{jM}, 0\} \quad \text{или} \\ V_p^{Eur}{}_{jM} = \max \{K - S_0 d^{M-j} u^j, 0\}. \quad (6)$$

Таким образом, для Европейских опционов при $\forall t_i$ их стоимость вычисляется рекурсивно при

$$i = M - 1, \dots, 0 \text{ по формуле} \\ V_{ji}^{Eur} = e^{-r\Delta t} \left[\frac{pV_{j+1,i+1}^{Eur} + (1-p)V_{j+1,i+2}^{Eur}}{3} + \frac{pV_{j+1,i}^{Eur} + (1-p)V_{j+1,i+2}^{Eur}}{3} + \frac{pV_{j+1,i}^{Eur} + (1-p)V_{j+1,i+1}^{Eur}}{3} \right] \\ 0 \leq i \leq M \text{ и } 0 \leq j \leq i. \quad (7)$$

Переменная p – есть вероятность роста цены акции, $(1-p)$ – вероятность снижения цены, а r – безрисковая процентная ставка. Значение V_{jM}^{Eur} вычисляется по формулам (5) или (6) в зависимости от вида опциона.

2. Результаты численных расчетов.

По описанному алгоритму была написана программа оценивания стоимости европейских и американских пут и колл опционов в среде Visual Studio 2010 C# (меню программы представлено на рис. 2.). Входными параметрами в меню программы являются параметры r, σ (волатильность), S_0, T, K, M . Пользователь имеет возможность выбора типа опциона: американский или европейский, пут или колл.

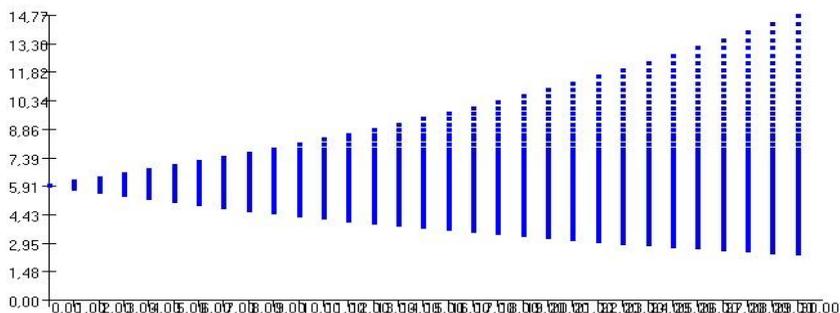


Рисунок 3 - Триномиальное дерево. Результат работы программы при параметрах $r = 0.1$; $\sigma = 0.3$; $S_0 = 6$; $T = \frac{3}{10}$; $K = 7$; $M=30$.

Приведем один из вариантов расчета программы для следующих входных параметров $r = 0.1$; $\sigma = 0.3$; $S_0 = 6$; $T = \frac{3}{10}$; $K = 7$, $M=30$.

Полученная трехмерная поверхность представлена на Рис. 4.

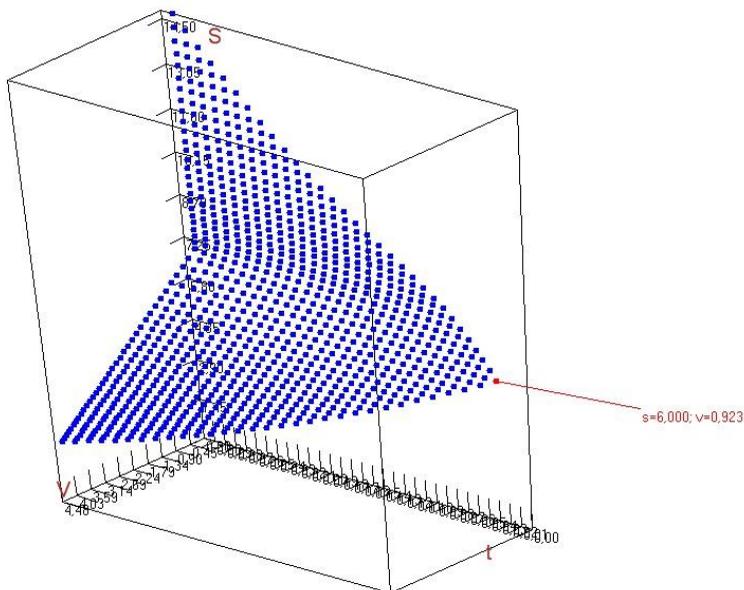


Рисунок 4 -Результат работы программы при параметрах $r = 0.1$; $\sigma = 0.3$; $S_0 = 6$; $T = \frac{3}{10}$; $K = 7$; $M=30$. $V_{EurP} = V_{EurP}(S_0, 0) = 0.923$
Как видно на рисунке стоимость опциона в данном случае равна $V_{EurP} = V_{EurP}(S_0, 0) = 0.923$ (на Рис. 4 это значение показано красной точкой).

Теперь исследуем и сравним точность триномиальной модели с биномиальной моделью при различных количествах точек M .

В Таблице 1 представлены результаты работы программы по определению цены пут опциона для следующих значений количества сечений в триномиальном дереве: $M=16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$. Здесь цена пут опциона рассчитана биномиальным методом (данные взяты из дипломной работы Мохнаткиной А.О [6])

Из сравнительной Таблицы 1 видно, что не обязательно вводить большое количество сечений по времени M . Оптимальным является значение M в интервале $[10;50]$ для триномиального метода и $[100;300]$

для биномиального метода, при которых он дает достаточно точные результаты.

Таблица 1 - Исследование и сравнение зависимости стоимости европейского пут опциона от количества сечений триномиального дерева

Цена пут опциона V_P^{Eur} (биномиальный метод)	Цена пут опциона V_P^{Eur} (триномиальный метод)	Количество точек m
0.9275	0.9239	16
0.9306	0.9238	32
0.9294	0.9239	64
0.9294	0.9238	128
0.9294	0.9236	256
0.9292	0.9237	512
0.9290	0.9237	1024

Аналогичная таблица получена и для расчетов цен европейских колл опционов.

Таблица 2 - Исследование и сравнение зависимости стоимости европейского колл опциона от количества точек M

Цена колл опциона V_C^{Eur} (биномиальный метод)	Цена колл опциона V_C^{Eur} (триномиальный метод)	Количество точек m
0.1344	0.1369	16
0.1374	0.1358	32
0.1363	0.1356	64
0.1362	0.1355	128
0.1362	0.1353	256
0.1361	0.1352	512
0.1359	0.1353	1024

Как и в случае пут опциона, для европейских колл опционов оптимальное значение для количества сечений триномиального дерева - M находится в интервале $[10;50]$ для триномиального метода и в интервале $[100;300]$ для биномиального метода.

Таким образом, в данной работе для оценивания стоимости стандартных (ванильных) опционов был апробирован триномиальный метод. Он показал близкие с биномиальным методом результаты численных расчетов. В работе проведено численное исследование оптимального количества сечений триномиального дерева.

Библиографический список

1. Васильева Т.А., Васильева О.Е. Application Mellin transforms to the Black – Scholes equations // Вестник ВолГУ, Математика. Физика.: Волгоград, Изд-во Вестник Волгогр. уни-та, 2009. N 12. С. 55-63.
2. Васильева Т.А., Рыжков А.А. Численная реализация триномимальной модели оценивания опционов В сборнике: [Математическое моделирование в экономике и управлении рисками](#) материалы III Международной молодежной научно-практической конференции. Саратовский государственный университет. Саратов, 2014. С. 172-176.
3. Васильева Т.А., Зеленый Д.Д. Опционный калькулятор для расчета стоимости азиатских опционов неявной разностной схемой // [Вестник Волгоградского государственного университета. Серия I: Математика. Физика](#), 2014. № 2. С. 51-56.
4. Зеленый Д.Д., Васильева Т.А. Создание опционного калькулятора для оценивания азиатского опциона // [Приложение математики в экономических и технических исследованиях](#). 2014. № 4 (4). С. 71-77.
5. Зеленый Д.Д., Васильева Т.А. Оценивание стоимости азиатских опционов неявной разностной схемой // Математическое моделирование в экономике, страховании и управлении рисками: сб. материалов между. молодеж. науч.-практ. конф. - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 5-8 ноября 2013 г, с.67-72.
6. Вайн Саймон Опционы. Полный курс для профессионалов. - М.: Альпина Паблишер, 2003. 416 С.
7. Desmond J. Higham M. An introduction to Financial Option valuation. Mathematics, Stochastic and Computation. Cambridge Univ. Press, 2005
8. R. Seydel . Tools for Computational Finance, Springer, Berlin, 2009.
9. Мохнаткина А. О. Оценивание опционов биномиальными методами. Дипломная работа, ФМИТ ВолГУ, июнь 2012 г, 40с.

INFORMATION ABOUT THE PAPER IN ENGLISH

T.A. Vasileva, A.A. Ryzhkov

Volgograd State University

NUMERICAL EVALUATION OF FINANCIAL OPTIONS TRINOMIAL METHOD

Abstract. Evaluation of options is one of the most important and actual tasks of the financial markets now. Crank-Nicolson method and Mellin integral transformations for estimation Asian and American a Call and Put options were considered in authors works [1-5]. The present article is devoted to

numerical research of a problem of calculation of cost of options by a trinomial method. Trinomial is an analog of the binomial method, and is building a trinomial tree, called the direct path method. At the second stage there is the inverse path in the course of which option cost is calculated.

Key words: *financial mathematics, options, call, put, binomial method, trinomial method.*

