1 О разности функций с времениподобными графиками,
А.Н. Кондрашов, 18 марта 2005

Изучаются свойства разности функций с времениподобными графиками.

1.1 Метрика

Пусть $\mathbb{R}^{n+1}_1$ — $(n+1)$-мерное пространство-время Минковского, т.е. линейное пространство, снабженное лоренцевой метрикой

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2, \tag{1}$$

где $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}_1$. Положим $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Всюду далее $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂D.

График функции $x_0 = f(x) \in C^1(D)$ в $\mathbb{R}^{n+1}_1$ будем обозначать через Γ_f. Метрика (1) индуцирует на нем первую квадратичную форму

$$\mathrm{ds}^2_f = \sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} - f_{x_i}(x) f_{x_j}(x)) dx_i dx_j. \tag{2}$$

Всюду далее $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение векторов в метрике ds^2_f, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — стандартное евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, а $|\cdot|^2$, $\|\cdot\|^2$ — соответствующие им скалярные квадраты; $Df = (f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})$ — градиент функции $f(x)$ в евклидовой метрике.

Поверхности класса C^1 в $\mathbb{R}^{n+1}_1$, в зависимости от свойств первой квадратичной формы, классифицируются следующим образом [1, глава 2, § 2.5]. Если форма невырождена и положительно определена, то поверхность называется *пространственноподобной*; если невырождена и индефинитна — *времениподобной*. В настоящей работе нас интересуют только времениподобные графики и функции описывающие их.

График $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^{n+1}_1$ функции $x_0 = f(x)$ времениподобен в точке $x \in D$ если $\|Df(x)\| > 1$.

1.2 Условия близости

Отметим, что матрицы $\{G_{ij}(x)\} = \{\delta_{ij} - f_{x_i}(x) f_{x_j}(x)\}$ и $\{G^{ij}(x)\} = \{\delta_{ij} - f_{x_i}(x) f_{x_j}(x)/(\|Df(x)\|^2 - 1)\}$ взаимно обратны при $\|Df\| \neq 1$.

Пусть $h(x) \in C^1(D)$. Величина

$$|\nabla h(x)|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} G^{ij}(x) h_{x_i}(x) h_{x_j}(x) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\delta_{ij} - \frac{f_{x_i}(x) f_{x_j}(x)}{\|Df(x)\|^2 - 1}\right) h_{x_i}(x) h_{x_j}(x)$$

представляет собой скалярный квадрат градиента функции $h(x)$ в метрике (2).

Для пары функций $f(x), g(x) \in C^1(D)$ с времениподобными графиками будем рассматривать следующие условия:

$$\langle Df(x), Dg(x) \rangle \geq 1 + \sqrt{(\|Df(x)\|^2 - 1)(\|Dg(x)\|^2 - 1)}, \tag{3}$$

и

$$|\nabla h(x)|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} G^{ij}(x) h_{x_i}(x) h_{x_j}(x) \ \leq 0 \ \ (h(x) = g(x) - f(x)). \tag{4}$$

Эти условия характеризуют степень близости метрик ds_f^2 и ds_g^2, т.е. внутренних геометрий графиков Γ_f и Γ_g. Можно показать, что условие (3) сильнее (4).

1.3 Единственность и принцип сравнения

Если график $\Gamma_f \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ времениподобен, то его средняя кривизна равна (см., например, [2, глава 4, § 18, 19])

$$H(x) = \frac{1}{n} \mathrm{div} \, \frac{Df(x)}{\sqrt{\|Df(x)\|^2 - 1}} \, .$$

Пусть $H(x,t)$ $(x \in D, t \in \mathbb{R})$ — невозрастающая по t функция. Будем рассматривать следующее дифференциальное уравнение в частных производных

$$\mathrm{div} \, \frac{Df(x)}{\sqrt{\|Df(x)\|^2 - 1}} = H(x, f(x)), \quad x \in D. \tag{5}$$

Заметим, что при $H(x,t) \equiv 0$ мы имеем уравнение минимальных поверхностей в пространстве Минковского [3, глава 1, §1.5].

Будем предполагать, что граница области D представлена в виде $\partial D = E_0 \cup E_1, (\mathrm{int}\,(E_0 \cap E_1) = \emptyset)$, допуская возможность $E_1 = \emptyset$, $E_0 = \partial D$.

Пусть в D заданы два решения (5) $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие на ∂D краевым условиям

(α) $f(x) = g(x)$ на E_0;

(β) $\frac{\frac{\partial f}{\partial n}}{\sqrt{\|Df(x)\|^2 - 1}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial n}}{\sqrt{\|Dg(x)\|^2 - 1}}$ на E_1, где n — внешняя нормаль к ∂D.

Будем обозначать через $D(E_0, f)$ множество таких точек $x \in D$, что у *любой* непродолжаемой изотропной геодезической в метрике (2), проходящей через x, хотя бы один из концов лежит в E_0.

Следующее утверждение есть теорема единственности для уравнения (5), в классе функций удовлетворяющих (3) и граничным условиям (α), (β).

Теорема 1. *Пусть $f(x), g(x) \in C^2(D)$ — решения уравнения (5), для которых выполнено (3) и краевые условия (α), (β). Тогда разность $h(x) = g(x) - f(x)$ удовлетворяет уравнению*

$$|\nabla h(x)|^2 = 0, \quad x \in D, \tag{6}$$

причем на множестве $D(E_0, f)$ выполнено $h(x) \equiv 0$.

Отметим, что если $E_0 = \partial D$, $E_1 = \emptyset$, то $D(E_0, f) = D$.

Следующая теорема представляет собой принцип сравнения функций, удовлетворяющих условию (4) в односвязных областях.

Теорема 2. *Пусть область $D \subset \mathbb{R}^n$ односвязна, $f(x)$, $g(x) \in C^1(D)$, и $h(x) = g(x) - f(x) \in C^n(D)$. Пусть $h(x)$ удовлетворяет условию (4). Тогда, если $f(x) \leq g(x)$ на ∂D, то $f(x) \leq g(x)$ всюду в D.*

1.4 Эффект "слипания" решений

Минимальные графики в $\mathbf{R}_1^{n+1}$ описываются дифференциальным уравнением (5) при $H(t,x) \equiv 0$

$$\operatorname{div}\left(\frac{Df}{\sqrt{\|Df\|^2 - 1}}\right) = 0, \tag{7}$$

или, равносильным ему на функциях с $\|Df(x)\| > 1$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(\delta_{ij} + \frac{f_{x_i} f_{x_j}}{1 - \|Df\|^2}\right) f_{x_i x_j} = 0. \tag{8}$$

Уравнение (7) является квазилинейным, эллиптическим на своих решениях [4, с. 240]. В то же время другая его форма записи (8), также квазилинейного вида, имеет гиперболический тип на решениях. Сказанное дает основания полагать, что решения данного уравнения должны обладать свойствами присущими как уравнениям эллиптического (например, для них справедлив принцип максимума—минимума), так и уравнениям гиперболического типа. К последним относится эффект "слипания" решений, т.е. совпадения *различных (в целом)* решений на подобластях.

Очевидно, всякая линейная функция $g(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i$, с $|\nabla g(x)|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 > 1$ удовлетворяет (7). Следующий результат иллюстрирует свойство "слипания", если одно из решений (7) линейная функция.

Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ — область, $\Gamma^{n-1} \subset D$ — гладкая, пространственноподобная относительно метрики $ds_g^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} - a_i a_j) dx_i dx_j$, поверхность.

Для всякого $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ введем обозначение

$$K(y) = \{x : \sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} - a_i a_j)(x_i - y_i)(x_j - y_j) = 0\}.$$

Поверхность $K(y)$ — конус с вершиной в точке y.

Обозначим, через $D(\Gamma^{n-1}) \subset D$ множество состоящее из Γ^{n-1} и точек $y \in \mathbf{R}^n$, для которых Γ^{n-1} отсекает от одной из половин конуса $K(y)$ конечную область, содержащую вершину y.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $f(x)$ — C^2-решение уравнения (7), заданное в D. Пусть на множестве Γ^{n-1} выполнены условия* 1) $f(x) = g(x)$, 2) $\nabla f(x) = \nabla g(x) = (a_1, \dots, a_n)$. *Тогда $f(x) \equiv g(x)$ в $D(\Gamma^{n-1})$.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] Бим Дж., Эрлих П. Глобальная лоренцева геометрия. М.: Мир, 1985, 400 С.

[2] Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Модель релятивисткой струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987, 176 С.

[3] Клячин В.А., Миклюков В.М. Трубки и ленты в пространстве-времени. Волгоград, Изд-во ВолГУ, 2004, 326 С.

[4] Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка, М.: Наука, 1989.

A.N. Kondrashov, **On difference of functions with timelike graphs**

Abstract. Some properties of difference of functions with timelike graphs are discussed.