УДК 519.2(073)
Т.А. Васильева, Д.Д. Зеленый
Волгоградский государственный университет

СОЗДАНИЕ ОПЦИОННОГО КАЛЬКУЛЯТОРА ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ АЗИАТСКОГО ОПЦИОНА

Аннотация. *Данная статья посвящена оцениванию и созданию опционного калькулятора, производящего расчет стоимости азиатских опционов. Опционные калькуляторы широко используются при анализе биржевых сводок, позволяя предсказывать поведение стоимости опционов при изменении различных параметров. Математической моделью рассматриваемой задачи является модель Блэка-Шоулза, представляющая собой параболическое уравнение в частных производных относительно стоимости азиатского опциона. Применение неявных разностных схем к решению поставленной задачи позволяет получить устойчивое численное решение для различных значений волатильности, безрисковой ставки и времени исполнения опциона[1-4].*
Ключевые слова: *азиатский опцион, оценивание, опционный калькулятор, разностные схемы, модель Блэка-Шоулза, численные методы.*

1. Сведения об опционах.

Опцион – это контракт на продажу или покупку ценных бумаг по *договорной цене* S_0, покупаемых до или в момент *срока исполнения опциона T* [5]. Введем следующие обозначения: *S*-стоимость базового актива, *t* $(t \in [0;T])$ – текущий момент времени, *V(S,t)* – функция стоимости опциона.

Существует два основных типа опциона – *call* и *put* опционы. *Put* опцион – это опцион, который дает право держателю опциона продать актив по фиксированной цене S_0 в момент времени *T*. *Call* опцион – это опцион, который дает право купить актив по фиксированной цене S_0 в момент времени *T*. После установленного договором срока, т.е. по истечении времени *T* (*t*>*T*), опцион обесценивается, и выплата такого опциона становится равной нулю.

Опционы разделяются по стилям: *европейские, американские и экзотические*. Европейский опцион – это опцион, который может быть исполнен только в момент времени исполнения опциона Т. Американский опцион – это опцион, который может быть исполнен в любой момент времени *t*<=*T*.

В данной статье мы будем рассматривать *азиатский опцион*. *Азиатский опцион* – это опцион, цена исполнения которого определяется как средняя цена опциона за весь период его исполнения. Цена такого опциона определяется “траекторией” ценовых значений базового актива.

Азиатские опционы заключаются на биржевые индексы, товары, валюту и ставку процента. Такие опционы применяются на рынке цветных металлов и энергоресурсов.

Для определения стоимости азиатского опциона на момент времени *t* $(t \in [0; T])$ необходимо знать среднее значение цен базовых активов *S*. В данной работе для вычисления средних значений цен использовалась формула арифметического среднего

$$A_t = \int_0^t f(S_\theta, \theta)\, d\theta,$$

2. Метод Блэка-Шоулза.

В 1973 году учеными Фишером Блэком и Майроном Шоулзом был разработан метод для оценки стоимости опционов [6]. Согласно модели Блэка-Шоулза цена базового актива на момент времени *t* рассчитывается согласно уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \qquad (1)$$

Здесь σ – коэффициент волатильности, *r* – безрисковая процентная ставка. В модели предполагается отсутствие транзакционных издержек и возможности арбитража.

Через *A* обозначим среднее значение всех имеющихся цен базовых активов *S* к моменту времени *t*. Таким образом, мы получим, что функция выплаты *V* азиатского опциона зависит от трех параметров – *A,S,t.* В таком случае, уравнение Блэка-Шоулза для азиатского опциона принимает вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + f(S,t)\frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0. \qquad (2)$$

Модель (2) имеет отличие от стандартной версии уравнения Блэка-Шоулза (1) – оно содержит новое слагаемое $f(S,T) = \frac{\partial V}{\partial A}$.

Таким образом, получаем задачу, которая сводится к численному решению уравнения (2) относительно величины *V(S,t,A)* – стоимости азиатского опциона при следующих заданных параметрах:

- σ – коэффициента волатильности,
- *T* – времени исполнения опциона,
- S_0 – цены исполнения опциона в момент времени *T*,
- r – безрисковой процентной ставке.

Все решения уравнения (2) определены на области *S>0, A>0,* $0 \le t \le T$ в трехмерном пространстве (*S*,*t*,*A*).

Проведение вычислений и поиск решений в пространстве (*S,t,A*) приводит к возникновению численных трудностей, поэтому задача (2) переформулируется и, с целью уменьшения пространства решений, проводится следующая замена. Введем вспомогательную переменную R_t

$$R_t = \frac{1}{S_t}\int_0^t S_\theta d\theta \, , \tag{3}$$

и вспомогательную функцию *H(R,t)*. Выразим стоимость азиатского опциона *V* через вспомогательную функцию и вспомогательную переменную

$$V(S,A,t) = S \cdot H(R,t) \tag{4}$$

Подстановкой выражения (3) в (4) получим следующий вид уравнения Блэка-Шоулза:

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{1}{2}\sigma^2 \mathrm{R}^2 \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial \mathrm{R}^2} + (1 - \mathrm{rR})\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{R}} = 0. \tag{5}$$

Для проведения вычислений необходимо определить начальные и граничные условия. Начальным условием является функция выплаты, которая определяется величинами T, R_t и S_0. Выражения для начального условия имеет вид

$$H(R_T,T) = (1 - \frac{1}{T}R_T)^+. \tag{6}$$

Уравнение (5) предполагает обратный проход по времени (т.е. от *t=T* до *t=0*). Для осуществления прямого прохода (т.е. от *t=0* до *t=T*) знак производных по времени в выражении (5) и в левом граничном условии изменяется. Перепишем уравнение (5), начальное условие (6) и граничные условия в виде

$$-\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} + (1 - rR)\frac{\partial H}{\partial R} = 0, \tag{7}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial R} = 0 \text{ при } R \to 0, \quad H(R,t) = 0 \text{ при } R \to \infty, \tag{8}$$

$$H(R_T,T) = (1 - \frac{R_T}{T})^+. \tag{9}$$

Таким образом, постановка задачи представлена уравнениями (7-9) относительно *H(R,t)*.

Данная задача решалась неявной разностной схемой относительно H_i^n. Неявная разностная схема, примененная к данной задаче и сведенная к трехдиагональному виду, выглядит следующим образом [7-9]:

$$\left(\frac{\frac{1}{2}\sigma^2 R_i^2}{h^2}-\frac{(1-rR_i)}{2h}\right)H_{i-1}^{n+1}+\left(-\frac{1}{\tau}-\frac{\sigma^2 R_i^2}{h^2}\right)H_i^{n+1}+\left(\frac{\frac{1}{2}\sigma^2 R_i^2}{h^2}+\frac{(1-rR_i)}{2h}\right)H_{i+1}^{n+1}=-\frac{1}{\tau}H_i^n$$

Задача решается при наличии начального условия, выраженного уравнением (9) с соблюдением граничных условий, которые имеют вид

$$\frac{H_0^1-H_0^0}{\tau}-\frac{H_1^0-H_0^0}{h}=0 \text{ при } i=0,$$

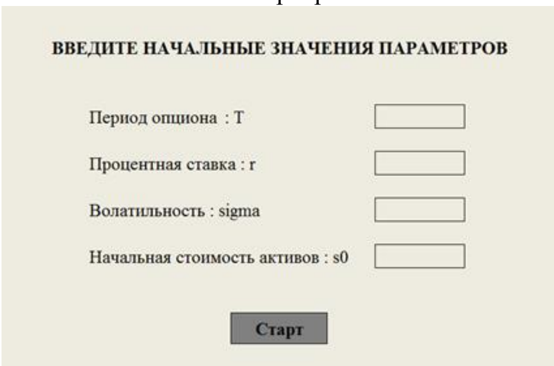
$$\frac{H_N^1-H_N^0}{\tau}-\frac{H_N^0-H_{N-1}^0}{h}=0 \text{ при } i=N.$$

После вычисления значений функции *H(R,t)* расчет стоимости азиатского опциона происходит согласно формуле (4).

3. Программа Asia_option.

Для численного решения задачи был разработан алгоритм, реализованный в виде программы *Asia_option* на языке программирования C++, с применением библиотек QT. Программа *Asia_option* представляет собой опционный калькулятор, предназначенный для вычисления стоимости азиатского опциона на основе разработанной методики численного решения уравнения Блэка-Шоулза.

Интерфейс программы предполагает инициализацию начальных данных (σ, T, r, S_0) пользователем в меню программы:



На первом этапе алгоритма программы происходит вычисление стоимости базовых активов S_{t_j} в каждый момент времени t_j для $t_j \in [0;T]$. Программа имеет два возможных варианта вычисления стоимости базовых активов. Один из них предполагает вычисления с применением модели Винеровского процесса:

$$S_t = S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t},$$

где величина W_t является непрерывным случайным винеровским процессом. Алгоритм для моделирования величины W_t имеет вид:

1. При $t=0$ $W_0 = 0$, задается Δt.

В пунктах 2,3,4 $j \in [1;n]$

2. $t_j = t_{j-1} + \Delta t$.
3. $Z \sim N(0,1)$.
4. $W_j = W_{j-1} + Z\sqrt{\Delta t}$.

Второй способ моделирования цен базовых активов состоит в применении прямого прохода биноминального метода. При этом цена базового актива рассчитывается согласно выражению:

$$S_{ji} = S_0 u^j d^{i-j}, \qquad \text{где } 0 \le j \le i, 0 \le i \le n,$$

где n-число разбиений временной оси, а коэффициенты u и d выражаются следующим способом:

$$u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}$$

$$d = \frac{1}{u} = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}$$

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{r\Delta t}} + e^{r\Delta t} * e^{\Delta t\sigma^2}\right)$$

Следующий этап программы состоит в расчете массива значений R_{t_j} на основе цен базовых активов S_{t_j} и поиске максимального значения R*max*.

Во время третьего этапа программы проходит расчет значений начального вектора *H*.

На четвертом этапе происходит вычисление вектора значений *H*, с применением неявной разностной схемы, а так же схем решения уравнений вида

$$Ax = f,$$

где *A*-матрица, *f*-вектора правой части, *x*-искомый вектор. Для решения подобного уравнения в рамках нашей задачи рационально применить метод прогонки.

Завершающий этап программы – вычисление стоимости азиатского опциона на основе подстановки полученных значений вектора *H* в выражение (4), а также вывод полученных результатов в виде файлов с расширением *.csv*.

Одной из дополнительных возможностей данной программы является вычисление *греков* – коэффициентов, которые помогают трейдеру в оценке стоимости опционов и принятии решение о купле/продаже ценных бумаг. Программа позволяет вычислить пять основных греков на основе применения к ним разностных схем

$$delta = \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta S}$$

$$teta = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{tau}, \qquad vega = \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta \sigma},$$

$$Po = \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta r}, \qquad gamma = \frac{V_{j+1}^{n+1} - 2V_j^{n+1} + V_{j-1}^{n+1}}{(\Delta S)^2}.$$

4. Результаты численных расчетов.

Данные расчетов для анализа полученных результатов сформированы в виде таблиц и графиков в формате электронных таблиц и диаграм Excel. Рассмотрим работу программы на примере азиатского *put*-опциона. Определим следующие значения входных параметров: r=0.05, $\sigma = 0.25$, $S_0 = 10$, T=1. Для простоты наблюдений выберем небольшое количество разбиений по времени, т.е. зададим *n=10.* На основе вычислений, полученных при заданных параметрах, мы получим график поверхности выплаты азиатского опциона следующего вида:

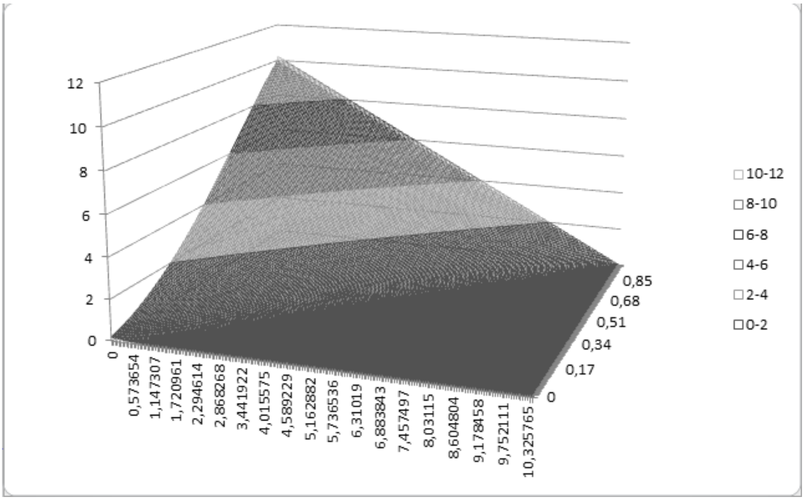


Рисунок 1 - График поверхности выплаты азиатского опциона

Библиографический список

1. Vasilyeva, T. Numerical methods for evaluating financial options// Workshop on Stochastic and PDE methods in financial mathematics 7-12 Sept., Yerevan, 2012. P. 27-28.

2. Васильева, Т. Численные методы оценивания финансовых опционов// XXI Международная конференция "Математика. Экономика. Образование": сб. материалов межд. конф. Новороссийск, 2012, С. 18-19.

3. Зеленый, Д.Д., Васильева, Т.А. Оценивание стоимости азиатских опционов неявной разностной схемой // Математическое моделирование в экономике, страховании и управлении рисками: сборник материалов межд. молодеж. науч.-практ. конф. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 5-8 ноября 2013 г, с.67-72.

4. Васильева Т.А., Васильева О.Е. Application Mellin transforms to the Black – Scholes equations // Вестник ВолГУ, Математика. Физика.: Волгоград, Издательство Вестник Волгоградского государственного университета, 2009. N 12. С. 55-63.

5.Вайн Саймон Опционы. Полный курс для профессионалов // М.: Альпина Паблишер, 2003. 416 С.

6.Black F., Sholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy, 81, May/June 1973. P.637-659.

7.Самарский А.А., Гулин В.Я. Численные методы. Наука, 1984.

8.Desmond J. Higham. An introduction to Financial Option valuation. Mathematics, Stochastic and Computation. Cambridge Univ. Press, 2005

9.R. Seydel . Tools for Computational Finance, Springer, Berlin, 2009.

INFORMATION ABOUT THE PAPER IN ENGLISH

T.A. Vasilyeva, D.D. Zelenyi

VolSU, Volgograd

OPTION CALCULATOR FOR ASIA OPTIONS EVALUATING

Abstract. *This paper focuses on evaluating the Asian option. Mathematical model of the problem is the Black-Scholes model, which is a parabolic partial differential equation relative to the price Asian option.*

The use of implicit finite difference schemes for solving the problem can produce a stable numerical solution for different values of volatility, risk-free rate and the time of exercise. For numerical solution algorithm was developed, implemented as a program Asia_option programming language C++. These calculations for the analysis of the results generated in the form of tables and graphs in spreadsheet format and Excel charts.

Key words: *Black-Sholes model, options, Asia option, Exotic options, financial mathematics, derivatives, implicit difference schemes, option calculator.*