УДК 514.75
ББК 22.151

СТРОЕНИЕ ПОДМНОГООБРАЗИЙ С ЦИКЛИЧЕСКИ РЕКУРРЕНТНОЙ ВТОРОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФОРМОЙ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И.И. Бодренко

В работе изучается строение n-мерных подмногообразий с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой в $(n+p)$-мерном евклидовом пространстве.

Ключевые слова: *вторая фундаментальная форма, связность Ван дер Вардена — Бортолотти, подмногообразие, риманово многоообразие, нормальная связность.*

Введение

Пусть F^n — n-мерное $(n \geq 2)$ гладкое подмногообразие в $(n+p)$-мерном $(p \geq 2)$ евклидовом пространстве E^{n+p}. Обозначим через b вторую фундаментальную форму F^n, через $\overline{\nabla}$ — связность Ван дер Вардена — Бортолотти.

Определение 1. *Вторая фундаментальная форма $b \neq 0$ называется параллельной (в связности $\overline{\nabla}$), если $\overline{\nabla} b = 0$.*

Подмногообразия с $\overline{\nabla} b = 0$ называются параллельными (см. [7–10]). Условие $\overline{\nabla} b = 0$ является аналитическим признаком локально симметрических подмногообразий ([4–6]). Общая задача классификации подмногообразий с $\overline{\nabla} b = 0$ в евклидовых пространствах решена в [5]. Классификация подмногообразий с $\overline{\nabla} b = 0$ в пространствах постоянной кривизны завершена в [4].

Определение 2. *Вторая фундаментальная форма $b \neq 0$ называется рекуррентной, если на F^n существует 1-форма μ такая, что $\overline{\nabla} b = \mu \otimes b$.*

Полная локальная классификация и геометрическое описание подмногообразий с не параллельной рекуррентной второй фундаментальной формой в пространствах постоянной кривизны получены в [2]. Свойства кэлеровых подмногообразий с рекуррентной второй фундаментальной формой в пространствах постоянной голоморфной секционной кривизны изучались в работе [1].

Определение 3. *Вторая фундаментальная форма $b \neq 0$ называется циклически рекуррентной, если на F^n существует 1-форма μ такая, что*

$$\overline{\nabla}_X b(Y,Z) = \mu(X)b(Y,Z) + \mu(Y)b(Z,X) + \mu(Z)b(X,Y) \tag{1}$$

для любых векторных полей X, Y, Z, касательных к F^n.

В настоящей работе доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть связное подмногообразие F^n в евклидовом пространстве E^{n+p} имеет циклически рекуррентную вторую фундаментальную форму b. Если F^n не лежит локально ни в одном $E^{n+1} \subset E^{n+p}$ и имеет плоскую нормальную связность, то F^n является:*

1) открытой частью риманова произведения $S^{m_1} \times \ldots \times S^{m_r} \subset E^{n+r} \subseteq E^{n+p}$ m_t-мерных сфер $S^{m_t} \subset E^{m_t+1}$, $t = \overline{1,r}$, $m_1 + \ldots m_r = n$, $2 \leq r \leq \min\{n,p\}$, или

2) открытой частью риманова произведения $E^m \times S^{m_1} \times \ldots \times S^{m_r} \subset E^{n+r} \subseteq E^{n+p}$ m-мерной плоскости E^m и m_t-мерных сфер $S^{m_t} \subset E^{m_t+1}$, $t = \overline{1,r}$, $m_1 + \ldots m_r = n - m$, $2 \leq r \leq \min\{n-m,p\}$.

Теорема 2. *Пусть связное подмногообразие F^n в евклидовом пространстве E^{n+2} имеет циклически рекуррентную вторую фундаментальную форму b. Если F^n является изотропным подмногообразием, то F^n является:*

1) открытой частью n-мерной плоскости $E^n \subset E^{n+2}$, или

2) открытой частью n-мерной сферы $S^n \subset E^{n+1} \subset E^{n+2}$.

1. Основные леммы

Пусть E^{n+p} — евклидово пространство с декартовыми прямоугольными координатами $(x^1, x^2, \ldots, x^{n+p})$, $<,>$ — скалярное произведение в E^{n+p}. Пусть F^n — гладкое подмногообразие в E^{n+p}. В окрестности каждой точки $x \in F^n$ подмногообразие F^n можно задать уравнениями

$$x^a = f^a(u^1, \ldots, u^n), \quad (u^1, \ldots, u^n) \in D, \quad a = \overline{1, n+p},$$

где D — некоторая область параметрического пространства $(u^1, \ldots, u^n)$, $f^a(u^1, \ldots, u^n) \in$ $\in C^\infty(D)$. Пусть

$$\bar{r}(u^1, \ldots, u^n) = \{f^1(u^1, \ldots, u^n), f^2(u^1, \ldots, u^n), \ldots, f^{n+p}(u^1, \ldots, u^n)\} \text{ —}$$

векторное параметрическое уравнение подмногообразия F^n в окрестности точки $x \in F^n$.

Пусть индексы i, j, k, l принимают значения от 1 до n, индексы α, β, σ — от 1 до p.

Рассмотрим нормальное оснащение подмногообразия F^n, заданное полем ортонормированных реперов $\{\bar{n}_\alpha\}$ в нормальном расслоении $T^\perp F^n$ подмногообразия F^n, $< \bar{n}_\alpha, \bar{n}_\beta >= \delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, матрица $\|\delta^{\alpha\beta}\| = \|\delta_{\alpha\beta}\|^{-1}$. Обозначим

$$\bar{r}_i = \frac{\partial \bar{r}(u^1, \ldots, u^n)}{\partial u^i}, \bar{r}_{ij} = \frac{\partial^2 \bar{r}(u^1, \ldots, u^n)}{\partial u^i \partial u^j}, \bar{n}_{\alpha|i} = \frac{\partial \bar{n}_\alpha(u^1, \ldots, u^n)}{\partial u^i}.$$

Векторы $\{\bar{r}_i(x)\}$ образуют базис касательного пространства $T_x F^n$ подмногообразия F^n в точке x. Метрическая форма подмногообразия F^n имеет вид: $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$, где $g_{ij} =< \bar{r}_i, \bar{r}_j >$. Обозначим через $II(\bar{n}_\alpha) = b_{\alpha ij} du^i du^j$ вторую квадратичную форму подмногообразия F^n относительно нормали $\bar{n}_\alpha$, где $b_{\alpha ij} = < \bar{n}_\alpha, \bar{r}_{ij} >$. В каждой точке $x \in F^n$ оператор Вейнгартена $A_\alpha : T_x F^n \longrightarrow T_x F^n$ относительно нормали $\bar{n}_\alpha(x)$ определяется по формуле $< A_\alpha \bar{r}_i(x), \bar{r}_j(x) >=< \bar{n}_\alpha(x), \bar{r}_{ij}(x) >$. Коэффициенты $\Gamma^\perp_{\alpha\beta|i} =< \bar{n}_\alpha, \bar{n}_{\beta|i} >$ называются компонентами нормальной связности D подмногообразия

F^n. Ковариантная производная вектора $\bar{n}_\alpha$ в нормальной связности D вычисляется по формуле $D_i\bar{n}_\alpha = \Gamma^{\perp\beta}_{\alpha|i}\bar{n}_\beta$, где $\Gamma^{\perp\beta}_{\alpha|i} = \delta^{\beta\sigma}\Gamma^{\perp}_{\sigma\alpha|i}$. Линейные формы $\omega_{\alpha\beta} = \Gamma^{\perp}_{\alpha\beta|i}du^i$ называются линейными формами кручения подмногообразия F^n. Компоненты тензора нормальной кривизны $R^\perp$ вычисляются по формуле

$$R^{\perp\alpha}_{\beta|ij} = \frac{\partial\Gamma^{\perp\alpha}_{\beta|i}}{\partial u^j} - \frac{\partial\Gamma^{\perp\alpha}_{\beta|j}}{\partial u^i} + \Gamma^{\perp\sigma}_{\beta|i}\Gamma^{\perp\alpha}_{\sigma|j} - \Gamma^{\perp\sigma}_{\beta|j}\Gamma^{\perp\alpha}_{\sigma|i}.$$

Ковариантная производная второй фундаментальной формы b в связности Ван дер Вардена — Бортолотти $\overline{\nabla}$ вычисляется по формуле

$$\overline{\nabla}_i b^\alpha_{jk} = \frac{\partial b^\alpha_{jk}}{\partial u^i} - \Gamma^l_{ij}b^\alpha_{lk} - \Gamma^l_{ik}b^\alpha_{jl} + \Gamma^{\perp\alpha}_{\beta|i}b^\beta_{jk},$$

где Γ^l_{ij} — символы Кристоффеля, вычисленные относительно метрического тензора g_{ij}, $b^\alpha_{ij} = \delta^{\alpha\sigma}b_{\sigma ij}$.

Уравнения Петерсона — Кодацци и Риччи, соответственно, имеют вид:

$$\overline{\nabla}_i b^\alpha_{jk} = \overline{\nabla}_j b^\alpha_{ik}, \tag{2}$$

$$R^{\perp\alpha}_{\beta|ij} = g^{kl}\left(b_{\beta ik}b^\alpha_{lj} - b_{\beta jk}b^\alpha_{li}\right). \tag{3}$$

Определение 4. *Первым нормальным пространством $N_1(x)$ подмногообразия F^n в точке x называется ортогональное дополнение подпространства $\{\xi(x) \in T^\perp_x F^n | A_{\xi(x)} = 0\}$ в $T^\perp_x F^n$.*

Определение 5. *Размерность подпространства $N_1(x) \subset T^\perp_x F^n$ называется точечной коразмерностью подмногообразия F^n в точке x.*

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть подмногообразие F^n в евклидовом пространстве E^{n+p} имеет циклически рекуррентную вторую фундаментальную форму b. Если в каждой точке $x \in F^n$ $\dim N_1(x) > 1$, и F^n имеет n главных направлений, то F^n является объединением замыканий своих областей, в каждой из которых*

1) F^n несет ортогональную сопряженную систему $\{L^{m_1}, \ldots, L^{m_r}\}$, $m_1 + \cdots + m_r = n$, $2 \le r \le \min\{n, p\}$;

2) F^n является римановым произведением $F^{m_1} \times \ldots \times F^{m_r}$ максимальных интегральных подмногообразий F^{m_t} распределений L^{m_t}, $t = \overline{1, r}$;

3) при $m_t = 1$ подмногообразия F^{m_t} являются линиями кривизны, при $m_t > 1$ — поверхностями кривизны подмногообразия F^n, $t = \overline{1, r}$.

Доказательство. Представим подмногообразие F^n в виде объединения замыканий своих областей V_τ, в каждой из которых F^n имеет постоянную точечную коразмерность q_τ и лежит в некотором $(n + q_\tau)$-мерном подпространстве $E^{n+q_\tau} \subset E^{n+p}$. Рассмотрим область $V \subset F^n$ такую, что $\dim N_1(x) = q$ в каждой точке $x \in V$. Подпространство $N_1(x) \subset T^\perp_x F^n$ является линейной оболочкой векторов $\{b^\alpha_{ij}\bar{n}_\alpha(x)\}$. Не ограничивая общности, будем считать, что нормальные векторы $\bar{n}_1(x)$, …, $\bar{n}_q(x)$ образуют базис $N_1(x)$. В каждой точке $x \in F^n$ в оснащении Родрига $\{\bar{n}_\alpha(x)\}$ для главных направлений $\{Y_i\}$ в силу (1) имеем:

$$\nabla_i b^\alpha_{jk} = 0, \quad i \ne j \ne k \ne i. \tag{4}$$

Обозначим через

$$a_i^\alpha = \frac{b^\alpha(Y_i, Y_i)}{g(Y_i, Y_i)}$$

кривизну F^n относительно нормали $\bar{n}_\alpha(x)$ в главном направлении Y_i. Для главных направлений $\{Y_i\}$ справедливы уравнения:

$$\rho_{jk}^\sigma(\nabla_{Y_k} b^\alpha)(Y_i, Y_j) = \rho_{ij}^\sigma \rho_{ik}^\sigma < Y_i, \nabla_{Y_j} Y_k - \nabla_{Y_k} Y_j >, \quad \rho_{ij}^\sigma = a_i^\sigma - a_j^\sigma, \quad i \neq j \neq k \neq i.$$

Отсюда, учитывая (4), находим, что в области V

$$\rho_{ij}^\sigma \rho_{ik}^\sigma < Y_i, \nabla_{Y_j} Y_k - \nabla_{Y_k} Y_j >= 0, \quad i \neq j \neq k \neq i. \tag{5}$$

Обозначим через $c_\sigma(x)$ число различных собственных значений оператора Вейнгартена A_σ в точке x относительно нормали $\bar{n}_\sigma(x)$. Так как по условию леммы $q > 1$, то в каждой точке $x \in F^n$ в любом базисе $\{\bar{n}_\alpha(x)\}$ нормального пространства $T_x^\perp F^n$ найдется нормаль $\bar{n}_\nu(x)$, относительно которой оператор Вейнгартена A_ν имеет по крайней мере два различных собственных значения. Пусть y — произвольная точка области V.

Случай 1. Существует нормаль $\bar{n}_\nu(x)$, относительно которой оператор Вейнгартена A_ν имеет простой спектр. Тогда в некоторой области $V(y) \subset V$ имеем $c_\nu(z) = n$ $\forall z \in V(y)$. Следовательно, в $V(y)$

$$\rho_{ij}^\nu \rho_{ik}^\nu \neq 0, \quad i \neq j \neq k \neq i. \tag{6}$$

Тогда из (5), учитывая (6), находим, что в области $V(y)$ выполняются равенства

$$< Y_i, \nabla_{Y_j} Y_k - \nabla_{Y_k} Y_j >= 0, \quad i \neq j \neq k \neq i.$$

Значит, главные направления $\{Y_i\}$ голономны в $V(y)$. Следовательно, векторные поля $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ образуют в $V(y) \subset V$ ортогональную сопряженную систему, все распределения L^{m_i} одномерны и порождены Y_i.

Случай 2. Для каждой нормали $\bar{n}_\alpha(x)$ выполнено неравенство $c_\alpha(x) < n$. Строим распределения L^{m_t} следующим образом. Будем считать, что векторное поле Y_t образует одномерное распределение L^{m_t}, если для каждого главного направления Y_s, отличного от Y_t, в точке y найдется нормаль $\bar{n}_\nu(y)$, $\nu = \nu(t, s)$, относительно которой $a_t^\nu \neq a_s^\nu$. Тогда $L^{m_t} = Y_t$ голономно в некоторой области $V_t(y) \subset V$. Векторные поля Y_j, Y_k будут принадлежать некоторому распределению L^{m_t} размерности больше 1, если главные кривизны в точке y в направлениях Y_j, Y_k относительно любой нормали $\bar{n}_\alpha(y)$ совпадают, то есть в y выполняются равенства $a_j^\alpha = a_k^\alpha$. Следовательно, $Y_s \notin L^{m_t}$, если найдется хотя бы одна нормаль $\bar{n}_\nu(y)$, $\nu = \nu(t, s)$, для которой в точке y выполняются неравенства: $a_s^\nu \neq a_j^\nu$, $a_s^\nu \neq a_k^\nu$. Отсюда, в силу (5), в некоторой области $V_t(y) \subset V$ будем иметь:

$$< Y_l, \nabla_{Y_j} Y_k - \nabla_{Y_k} Y_j >= 0, \quad \forall Y_j, Y_k \in L^{m_t}, \quad \forall Y_s \notin L^{m_t}.$$

Отсюда, учитывая, что главные направления попарно ортогональны, получим инволютивность L^{m_t} в $V_t(y)$.

Рассмотрим построенные распределения L^{m_t}, $t = \overline{1, r}$, в области

$$V(y) \subset \bigcap_{t=1}^{r} V_t(y).$$

Не ограничивая общности, можем считать, что распределения L^{m_t} порождаются векторными полями

$$Y_{p_{t-1}+1}, \dots, Y_{p_t}, \quad p_0 = 0, \quad p_r = n, \quad t = \overline{1,r}.$$

Распределения L^{m_t} попарно ортогональны и сопряжены, то есть

$$b(X,Y) = 0, \quad g(X,Y) = 0, \quad \forall X \in L^{m_t}, \quad \forall Y \in L^{m_s}, \quad t \neq s, \quad s,t = \overline{1,r}. \tag{7}$$

Таким образом, распределения L_{m_t}, $t = \overline{1,r}$, образуют ортогональную сопряженную систему в области $V(y)$. Следовательно, в $V(y)$ можно ввести координаты $(u^1, \dots, u^n)$ такие, что векторные поля

$$\frac{\partial}{\partial u^{p_{t-1}+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{p_t}}$$

порождают распределения L^{m_t}, $t = \overline{1,r}$. Отсюда, учитывая (7), в $V(y)$ получим:

$$b(\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k}) = 0,\ g(\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k}) = 0,\ \forall \frac{\partial}{\partial u^j} \in L^{m_s},\ \forall \frac{\partial}{\partial u^k} \in L^{m_t},\ s \neq t, \quad s,t = \overline{1,r}. \tag{8}$$

Кроме того, для любых $Y_j \in L^{m_s}$ и $Y_k \in L^{m_t}$, $s \neq t$, $s,t = \overline{1,r}$, найдется нормаль $\bar{n}_\nu$, $\nu = \nu(j,k)$, такая, что $a_j^\nu \neq a_k^\nu$ в $V(y)$. Так как для любых векторных полей $Y_i, Y_j \in L^{m_t}$ главные кривизны относительно всех нормалей $\bar{n}_\alpha(y)$ совпадают, то

$$b^\alpha(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}) = a_t^\alpha g(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}), \quad \forall \frac{\partial}{\partial u^i},\ \forall \frac{\partial}{\partial u^j} \in L^{m_t}, \tag{9}$$

где

$$a_t^\alpha = a_i^\alpha, \quad \forall Y_i \in L^{m_t}, \quad \alpha = \overline{1,p}, \quad t = \overline{1,r}.$$

Тогда из (2), учитывая (8) и (9), находим, что в $V(y)$ главные кривизны $a_i^\alpha = \mathrm{const}$. Значит, в области

$$V = \bigcup_{y \in V} V(y)$$

$a_i^\alpha = \mathrm{const}$, $i = \overline{1,n}$, $\alpha = \overline{1,p}$; построенные нами распределения L^{m_t}, $t = \overline{1,r}$, образуют в v ортогональную сопряженную систему; их максимальные интегральные подмногообразия F^{m_t} при $m_t > 1$ являются поверхностями кривизны, а при $m_t = 1$ — линиями кривизны подмногообразия F^n.

Основные квадратичные формы F^n в области V имеют вид:

$$ds^2 = \sum_{t=1}^{r} \sum_{j,k=p_{t-1}+1}^{p_t} g_{jk} du^j du^k, \quad II(\bar{n}_\sigma) = \sum_{t=1}^{r} a^\sigma_{p_{t-1}+1} \sum_{j,k=p_{t-1}+1}^{p_t} g_{jk} du^j du^k,$$

где $p_0 = 0$, $p_r = n$, $a_j^\sigma = a_k^\sigma$, $j,k = \overline{p_{t-1}+1, p_t}$, $t = \overline{1,r}$, $\sigma = \overline{1,p}$.

Линейные формы кручения подмногообразия F^n в V тождественно нулевые: $\omega_{\alpha\beta} \equiv 0$, $\alpha, \beta = \overline{1,p}$.

Проведем ортогональное преобразование оснащения $\{\bar{n}_\alpha\}$: $\bar{n}^*_\sigma = c^\alpha_\sigma \bar{n}_\alpha$ с постоянными коэффициентами $c^\alpha_\sigma = \mathrm{const}$ такое, что

$$II(\bar{n}^*_\nu) = a^{*\nu} \sum_{j,k=p_{t-1}+1}^{p_t} g_{jk} du^j du^k, \quad a^{*\nu} = \mathrm{const}, \quad \nu = \overline{1,r}, \quad II(\bar{n}^*_\rho) \equiv 0, \quad \rho = \overline{r+1,p},$$

при этом $\omega^*_{\alpha\beta} \equiv 0$, $\alpha, \beta = \overline{1, p}$.

Следовательно, F^n распадается в V на риманово произведение $F^{m_1} \times \ldots \times F^{m_r}$ максимальных интегральных подмногообразий F^{m_t}. Каждое F^{m_t} является гиперповерхностью в E^{m_t+1}, $t = \overline{1, r}$, $2 \leq r \leq \min\{n, p\}$. Лемма доказана.

Определение 6. *Подмногообразие F^n называется изотропным, если на F^n существует функция λ такая, что*

$$|b(t,t)| = \lambda(x)|t|^2, \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_x F^n.$$

Лемма 2. *Пусть подмногообразие F^n в евклидовом пространстве E^{n+2} имеет циклически рекуррентную вторую фундаментальную форму b. Если F^n является изотропным подмногообразием, то F^n имеет плоскую нормальную связность.*

Доказательство. В некоторой окрестности $O(x) \subset F^n$ произвольной точки $x \in F^n$ введем геодезические нормальные координаты $(u^1, \ldots, u^n)$ (см.: [3]) такие, что

$$g_{1m} = \begin{cases} 1, & m = 1, \\ 0, & m = \overline{2, n}. \end{cases} \tag{10}$$

Рассмотрим в $O(x)$ векторное поле $\bar{b}_{ij} = b^{\alpha}_{ij}\bar{n}_{\alpha}$. Если в точке x вектор $\bar{b}_{11} = 0$, то из уравнений (3) получим, что $R^{\perp} = 0$ в x. Пусть теперь $\bar{b}_{11} \neq 0$ в точке x, тогда в некоторой окрестности $U(x) \subset O(x)$ векторное поле $\bar{b}_{11} \neq 0$. Построим в $U(x)$ оснащение $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$, положив

$$\bar{n}_1 = \frac{\bar{b}_{11}}{\lambda(u^1, \ldots, u^n)}.$$

Учитывая (10), находим, что в $U(x)$

$$< \bar{b}_{ii}, \bar{n}_2 >= 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Отсюда, используя (1), находим:

$$< (\overline{\nabla}_i b^{\alpha}_{ii})\bar{n}_{\alpha}, \bar{n}_2 >= 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Следовательно, $\Gamma^{\perp 2}_{1|i}(u^1, \ldots, u^n) = 0$, $i = \overline{1, n}$. Значит, $R^{\perp} \equiv 0$ в $U(x)$. Лемма доказана.

2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть в области $V \subset F^n$ точечная коразмерность $q = \mathrm{const} > 1$. Согласно лемме 1, в области V подмногообразие F^n является римановым произведением $F^{m_1} \times \ldots \times F^{m_r}$ гиперповерхностей $F^{m_t} \subset E^{m_t+1}$, $t = \overline{1, r}$, при этом в V можно ввести координаты $(u^1, \ldots, u^n)$ такие, что основные квадратичные формы гиперповерхности $F^{m_t} \subset E^{m_t+1}$ имеют вид:

$$ds^2 = \sum_{j,k=p_{t-1}+1}^{p_t} g_{jk}(u^{p_{t-1}+1}, \ldots, u^p_t) du^j du^k,$$

$$II(\bar{n}_t) = a^t \sum_{j,k=p_{t-1}+1}^{p_t} g_{jk}(u^{p_{t-1}+1}, \ldots, u^p_t) du^j du^k, a^t = \mathrm{const}.$$

Введем в E^{m_t+1} декартовы прямоугольные координаты $(y^1, \dots, y^{m_t+1})$ и зададим F^{m_t} в области V уравнениями

$$y^t = y^t(u^{p_{t-1}+1}, \dots, u_t^p), \; t = \overline{1, m_t+1}.$$

Если $a^t = 0$ в V, то координаты любой точки $y \in F^{m_t}$ удовлетворяют уравнению некоторой гиперплоскости $E^{m_t} \subset E^{m_t+1}$. Если $a^t \neq 0$, то все точки поверхности F^{m_t} лежат на некоторой гиперсфере $S^{m_t} \subset E^{m_t+1}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Представим подмногообразие F^n в виде объединения замыканий своих областей V_τ, в каждой из которых F^n имеет постоянную точечную коразмерность q_τ и лежит в некотором $(n+q_\tau)$-мерном подпространстве $E^{n+q_\tau} \subset E^{n+p}$. Из леммы 2 следует, что F^n имеет n главных направлений в каждой точке x. Тогда $\dim N_1(x) \le 1$, $\forall x \in F^n$. Рассмотрим область $V \subset F^n$ такую, что $\dim N_1(x) = q$ в каждой точке $x \in V$.

Случай 1. $q = 0$. Тогда $\bar{b}_{ij} = 0$ в V. Следовательно, V является частью некоторой n-мерной плоскости $E^n \subset E^{n+1} \subset E^{n+2}$.

Случай 2. $q = 1$. Введем в некоторой окрестности $U(x) \subset V$ локальные координаты $(u^1, \dots, u^n)$ и рассмотрим векторное поле

$$\bar{\xi} = \frac{\bar{b}_{11}}{\lambda(u^1, \dots, u^n)}.$$

Тогда, в силу (1), имеем

$$\bar{b}_{ij} = \lambda(u^1, \dots, u^n)\, g_{ij}\, \bar{\xi}.$$

Из уравнений (4) находим, что $\lambda \equiv \text{const}$ в $U(x)$. Следовательно, область V лежит на некоторой n-мерной сфере $S^n \subset E^{n+1} \subset E^{n+2}$ радиуса $1/\lambda$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бодренко, И. И. Некоторые свойства кэлеровых подмногообразий с рекуррентными тензорными полями / И. И. Бодренко // Вестн. ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — 2006. — Вып. 10. — С. 11–21.
2. Бодренко, И. И. Подмногообразия с рекуррентной второй фундаментальной формой в пространствах постоянной кривизны / И. И. Бодренко // Обозрение прикладной и промышленной математики — 2007. — Т. 14, № 4. — С. 679–682.
3. Эйзенхарт, Л. П. Риманова геометрия / Л. П. Эйзенхарт. — М. : Изд-во иностр. лит., 1948. — 316 с.
4. Backes, E. On symmetric submanifolds of spaces of constant curvature / E. Backes, H. D. Reckziegel // Math. Ann. — 1983. — V. 263, № 4. — P. 419–433.
5. Ferus, D. Symmetric submanifolds of Riemannian manifolds / D. Ferus // Math. Ann. — 1980. — V. 247, № 1. — P. 81–93.
6. Strübing, W. Symmetric submanifolds of Riemannian manifolds / W. Strübing // Math. Ann. — 1979. — V. 245, № 1. — P. 37–44.
7. Takeuchi, M. Parallel submanifolds of space forms / M. Takeuchi // Manifolds and Lie groups. Papers in honour of Y. Matsushima. Basel. — 1981. — P. 429–447.
8. Tsukada, K. Parallel Kaehler submanifolds of Hermitian symmetric spaces / K. Tsukada // Math. Z. — 1985. — V. 190, № 1. — P. 129–150.

9. Tsukada, K. Parallel submanifolds in a quaternion projective space / K. Tsukada // Osaka J. Math. — 1985. — V. 190, № 1. — P. 129–150.
10. Tsukada, K. Parallel submanifolds of Cayley plane / K. Tsukada // Sci. Repts. Niigata Univ. — 1985. — V. A, № 21. — P. 19–32.

STRUCTURE OF SUBMANIFOULDS WITH CYCLIC RECURRENT SECOND FUNDAMENTAL FORM IN EUCLIDEAN SPACE

I.I. Bodrenko

The structure of n-dimensional submanifoulds with cyclic recurrent second fundamental form in $(n+p)$-dimensional Euclidean space is studied in this article.

Key words: *second fundamental form, connection of van der Waerden — Bortolotti, submanifold, Riemannian manifold, normal connection.*