УДК 530.145
ББК 22.314

К ВОПРОСУ ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ЛОКАЛЬНО ЭКВИВАЛЕНТНЫХ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ ДВУХ КУБИТОВ [1]

Д.В. Додин

Для матрицы плотности квантовой системы из двух кубитов предложена оригинальная параметризация на основе векторного представления состояний. Изучаются свойства состояний квантовой системы, эквивалентных с точностью до локального унитарного преобразования. Построено аналитическое описание многообразия таких состояний. Рассмотрен общий случай, включающий смешанные состояния квантовой системы. Обсуждаются вопросы взаимосвязи данного многообразия со свойствами и мерой запутанности квантово-механических систем.

Ключевые слова: *составные квантовые системы, кубит, квантовый регистр, запутанность, фактор-группа.*

Введение

Изучение запутанности квантово-механических состояний остается важным направлением исследований в области квантовой информатики, как из-за важности понятия запутанности в прикладных алгоритмах, так и по причине тесной связи этого понятия с другими разделами квантового компьютинга. Как демонстрирует история развития этого направления [1; 3], углубление нашего понимания концепции запутанности приводит к улучшению понимания структуры и логики квантовой механики, к новому взгляду на само понятие физического состояния [2].

В настоящее время запутанность рассматривается как одно из основных отличий квантово-механических систем от классических, делающее первые интересными с точки зрения приложений в вопросах обработки информации и квантовых коммуникаций. Ряд авторов указывают на запутанность как на основную причину ускорения квантово-механических расчетов по сравнению с классическими [4].

Несмотря на прилагаемые большие усилия, направленные на понимание этого физического явления, законченной теории запутанности в настоящее время не создано. Так, остаются нерешенными вопросы определения универсальных мер запутанности, приложимых не только к чис-

© Додин Д.В., 2011

тым, но и к смешанным состояниям; установление критериев запутанности квантового состояния; вопросы взаимосвязи различных мер запутанности; изучение общих свойств многокомпонентных квантовых систем [3].

Одним из важнейших свойств запутанности, играющим важную роль в дальнейших рассуждениях, является инвариантность запутанности по отношению к локальным операциям над подсистемами квантовой системы [3; 5]. Другими словами, запутанное состояние двух и более кубитов не может быть ни создано, ни существенно изменено (в смысле изменения запутанности) воздействием на отдельные кубиты. Таким образом, все состояния, которые могут быть получены из состояния с заданной запутанностью только с помощью локальных операций, можно отождествить в смысле величины хранимой в них запутанности. Мы говорим о таких состояниях, как о состояниях, эквивалентных в локальном смысле.

Возникает вопрос о том, как описать многообразие таких состояний. Решение данного вопроса с необходимостью должно предварять исследование взаимосвязи таких многообразий с мерой запутанности квантовых систем. Отдельный важный вопрос – изучение геометрических свойств этих многообразий.

1. Многообразие локально эквивалентных состояний

Группа локальных преобразований, оставляющая запутанность системы из n квантовых битов неизменной, представляет собой тензорное произведение унитарных преобразований, действующих на каждый из кубитов

$$U_1 \otimes U_2 \otimes \ldots \otimes U_{n-1} \otimes U_n. \tag{1}$$

В результате действия группы локальных преобразований на всевозможные состояния квантовой системы будем получать состояния

$$|e\rangle = U_1 \otimes U_2 \otimes \ldots \otimes U_{n-1} \otimes U_n \, |\psi\rangle, \tag{2}$$

каждое из которых можно считать представителем множества состояний, получаемых друг из друга путем локальных унитарных операций (эквивалентных в локальном смысле). Множество таких состояний мы называем многообразием локально эквивалентных состояний.

Таким образом, многообразие локально эквивалентных состояний можно определить как фактор-пространство состояний полной системы S по состояниям подсистем S_i. Для n кубитов получим

$$E_n = H_n / H_1 \otimes H_1 \otimes \ldots \otimes H_1, \tag{3}$$

где H_n – гильбертово пространство квантового регистра;
H_1 – гильбертовы пространства каждого из кубитов.

Следует заметить, что два соседних состояния полученного многообразия могут иметь и одинаковую запутанность, но не быть отождествленными, так как класс преобразований, не изменяющих запутанность, вообще говоря, более широкий, чем класс чисто локальных унитарных операций. Полная группа преобразований многообразия E_n n-кубитного регистра, связывающая две произвольные точки многообразия E_n, получается как фактор-группа $G = U(2^n)/U(2) \otimes U(2) \otimes \ldots \otimes U(2)$, где $U(2)$ – группа унитарных преобразований кубита, $U(2^n)$ – группа преобразований всего квантового регистра, действующая в 2^n-мерном гильбертовом пространстве.

Размерность пространства локально эквивалентных состояний для n кубитов описывается формулой

$$\dim(E_n) = 2(2^n - n - 1). \tag{4}$$

В случае чистого состояния квантового регистра из двух кубитов легко показать, что многообразие E_2 является поверхностью в трехмерном пространстве, изоморфной сфере Блоха. Многообразие описывается двумя параметрами, поэтому при фиксированной величине запутанности оно будет распадаться на одномерные слои с одинаковой запутанностью.

2. Смешанное состояние двух кубитов

В случае смешанного состояния матрица плотности двух кубитов может быть представлена в следующем виде

$$\varrho = \frac{1}{4}\left[I_2 \otimes I_2 + \sum_{i=1}^{3} s_{1i}(I_2 \otimes \sigma_i) + \sum_{j=1}^{3} s_{2j}(\sigma_j \otimes I_2) + \sum_{i,j=1}^{3} K_{ij}(\sigma_i \otimes \sigma_j)\right], \tag{5}$$

где используются стандартные обозначения для матриц Паули

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

С помощью матриц Паули (6) унитарное преобразование, действующее на кубит, представимо в виде:

$$U = \exp(i\alpha)\exp(-i\theta\vec{n}\vec{\sigma}/2) = \exp(i\alpha)\left(I_2\cos\frac{\theta}{2} - i(\vec{n}\vec{\sigma})\sin\frac{\theta}{2}\right), \tag{7}$$

где n – единичный вектор, задающий ось поворота;

σ – вектор Паули

$$\vec{\sigma} = \vec{e_x}\sigma_x + \vec{e_y}\sigma_y + \vec{e_z}\sigma_z. \tag{8}$$

Однокубитное унитарное преобразование (7) параметризуется четырьмя параметрами: α – общая фаза; еще два – это углы в сферической системе координат, задающие положение оси поворота (вектора n); и, наконец, сам угол поворота – θ. Очевидно, существенны только последние три параметра. Они позволяют переводить произвольное состояние кубита в любое заданное.

Как видно, матрица плотности двухкубитного регистра имеет пятнадцать независимых вещественных параметров. В представлении (5) шесть из них можно объединить в вектора S_1 и S_2, а остальные девять содержатся в тензоре K. Последний параметр удобно разделить на симметричную и антисимметричную части

$$K = K_{sym} + K_{asym}. \tag{9}$$

В симметричной части – шесть параметров, и ее можно представить в виде комбинации тензорных произведений собственных векторов симметричной части

$$K_{sym} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \vec{k}_i^T \otimes \vec{k}_i. \tag{10}$$

Антисимметричная часть содержит три параметра, и может быть представлена следующим образом:

$$K_{asym} = \varepsilon_{ijk}\vec{R}_k = \begin{pmatrix} 0 & R_z & -R_y \\ -R_z & 0 & R_x \\ R_y & -R_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

С учетом введенных обозначений можно переписать матрицу плотности двухкубитной системы в следующем, изящном, виде

$$\begin{aligned} \varrho = & \frac{1}{4}[I_2 \otimes I_2 + I_2 \otimes \sigma(\vec{S}_1) + \sigma(\vec{S}_2) \otimes I_2 \\ & + \sum_{i=1}^{i=3} \lambda_i \sigma(\vec{k}_i) \otimes \sigma(\vec{k}_i) + (\vec{R}, (I_2 \otimes \vec{\sigma} \times \vec{\sigma} \otimes I_2))]' \end{aligned} \tag{12}$$

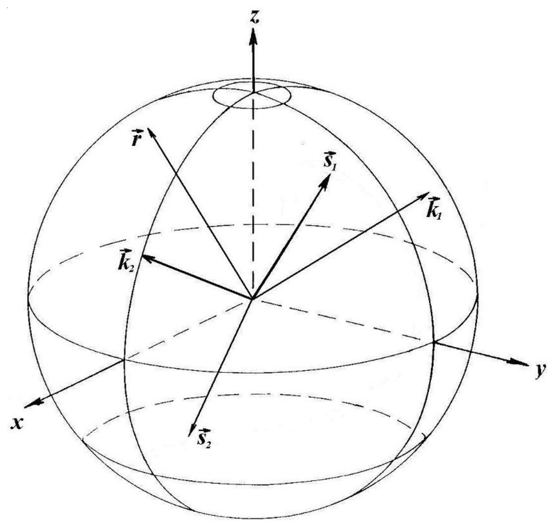
или явно выделяя модули векторов

$$\vec{S}_i = S_i \cdot \vec{s}_i, \vec{R} = R \cdot \vec{r}, \tag{13}$$

получим

$$\begin{aligned} \varrho = & \frac{1}{4}\left[I_2 \otimes I_2 + S_1(I_2 \otimes (\vec{\sigma}, \vec{s}_1)) + S_2((\vec{\sigma}, \vec{s}_2) \otimes I_2) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{i=3} \lambda_i \sigma(\vec{k}_i) \otimes \sigma(\vec{k}_i) + R(\vec{r}, (I_2 \otimes \vec{\sigma} \times \vec{\sigma} \otimes I_2))\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь s_i и k_i – единичные векторы, лежащие на сфере Блоха (см. рисунок). Они могут быть соотнесены с локализованными состояниями кубитов, тогда через параметры S_i и λ_i выражается статистический вес соответствующих состояний в смеси.



Сфера Блоха и векторы, параметризующие состояние двух кубитов

В формуле (14) второе и третье слагаемые должны пониматься как аддитивная композиция локальных квантовых состояний, а четвертое как мультипликативная. В отличие от описанных векторов вектор r, хотя формально и может быть помещен на сферу Блоха, имеет совершенно иной смысл. Алгебраическая структура включения его в матрицу плотности позволяет предположить, что он описывает нелокальные корреляции в квантовой системе, не выражаемые через локальные состояния кубитов.

Действие унитарного преобразования на каждый кубит позволяет исключить по два параметра. При этом матрица плотности кубита приводится к диагональному виду:

$$U^{\dagger}\varrho_i U = (I_2 + s_i\sigma_z)/2. \tag{15}$$

Воздействуя локальными преобразованиями на матрицу плотности (5), следует подобрать параметры таким образом, чтобы минимизировать число свободных параметров в окончательном результате. Пусть мы подобрали параметры локальных преобразований таким образом, что состояния, задаваемые векторами S_1 и S_2, диагонализовались. Это предполагает, что параметры преобразования (7) фиксированы. Тогда локально преобразованная матрица будет иметь следующий вид

$$\begin{gathered}\omega = (U_1^{\dagger} \otimes U_2^{\dagger})\varrho(U_1 \otimes U_2) = \frac{1}{4}\,[I_2 \otimes I_2 + \\ +S_1(I_2 \otimes \sigma_z) + S_2(\sigma_z \otimes I_2) + \sum_{i,j=1}^{3} K'_{ij}(\sigma_i \otimes \sigma_j\,)]\end{gathered} \tag{16}$$

Здесь штрихом отмечены величины, подвергнутые преобразованию.

Компоненты симметричной части тензора K' выглядят следующим образом:

$$\begin{gathered}(K'_{sym})_{ij} = \sum_{s=1}^{s=3} \lambda_s k'_{si}k'_{js} - R(\sin\theta_1\ (\vec{n}_1, \vec{r}) - \sin\theta_2(\vec{n}_2, \vec{r}))\delta_{ij} + \\ +R(\sin\theta_2\ n_{2i}r_j - \sin\theta_1\ r_i n_{1j}) \\ +\frac{1}{2}R\sin\theta_2\sin\theta_1[(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2)_i r_j + r_i(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2)_j],\end{gathered} \tag{17}$$

где величины k'_{si} и k'_{sj} определены так:

$$\begin{gathered}\vec{k}'_{si} = (\vec{k}_s\cos\theta_1 - \sin\theta_1[\vec{n_1} \times \vec{k}_s] + 2\vec{n_1}(\vec{n_1}, \vec{k}_s)\sin^2\theta_1/2)_i, \\ \vec{k}'_{sj} = (\vec{k}_s\cos\theta_2 - \sin\theta_2[\vec{n_2} \times \vec{k}_s] + 2\vec{n_2}(\vec{n_2}, \vec{k}_s)\sin^2\theta_2/2)_j.\end{gathered} \tag{18}$$

Для антисимметричной части имеем:

$$\begin{gathered}(K'_{asym})_{ij} = R\varepsilon_{ijk}\vec{r}'_k, \\ \vec{r}' = \vec{r} + \frac{1}{2}\sin\theta_2\sin\theta_1[(\vec{n}_1, \vec{r})\vec{n}_2 + (\vec{n}_2, \vec{r})\vec{n}_1].\end{gathered} \tag{19}$$

Формулы (16)–(19) аналитически описывают многообразие E_2 в случае смешанного состояния квантового регистра из двух кубитов.

Подсчитывая количество базисных матриц в выражении (16), легко установить, что многообразие локально эквивалентных состояний лежит в пространстве одиннадцати измерений, и параметризовано, вообще говоря, одиннадцатью параметрами. Однако вопрос о геометрических свойствах полученного многообразия требует отдельного исследования, так как наличие нетривиальных взаимосвязей между компонентами матрицы может привести к уменьшению независимых параметров и, как следствие, к редукции эффективной размерности многообразия.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа была поддержана из средств контракта № 14.740.11.0374 Министерства науки и образования РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нильсен, М. Квантовые вычисления и квантовая информация / М. Нильсен, И. Чанг. – М. : Мир, 2006. – 822 с.

2. Dodin, D. V. Non-multiple non-equidimensional bases and unsharp measurements / D. V. Dodin, I. G. Kovalenko // Proc. SPIE. – Vol. 7023. – 702306 (2008).

3. Horodecki, R. Quantum entanglement / R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki. – Mode of access: arXiv:quant-ph/0702225v2 (2007).

4. Jozsa, R. On the role of entanglement in quantum computational speed-up / R. Jozsa, N. Linden. – Mode of access: arXiv:quant-ph/0201143v2 (2002).

5. Plenio, M. B. Teleportation, Entanglement and Thermodynamics in the Quantum World / M. B. Plenio, V. Vedral // Contemporary Phys. – 1998. – V. 39, № 6. – P. 431–446.

ON ANALYTICAL DESCRIPTION OF THE LOCAL EQUIVALENT STATES OF DOUBLE-QUBIT QUANTUM SYSTEM

D.V. Dodin

The double-qubit quantum system is considered. The original parameterization based on vector presentation of state are proposed. We consider the states of quantum system which are equivalent to local unitary transformation. The analytical description of manifold of these states are constructed. The general case of mix state are investigated. The questions of relationship this manifold with properties and measure of entanglement are discussed.

Key words: *quantum entanglement, composite quantum systems, qubit, quantum register, factor group.*