УДК 517.54
ББК 22.161.5

ДРОБНОЕ ИТЕРИРОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

О.С. Кудрявцева

Исследуется проблема дробного итерирования в классе аналитических функций, отображающих единичный круг в себя, сохраняющих начало координат и имеющих вещественные коэффициенты разложения в ряд Маклорена, в терминах функции Кёнигса. Получено интегральное представление класса функций Кёнигса, соответствующих функциям изучаемого класса, допускающим дробное итерирование в этом классе. Даны некоторые необходимые условия существования дробных итераций функций рассматриваемого класса в терминах оценок их начальных коэффициентов.

Ключевые слова: *дробные итерации, однопараметрическая полугруппа, инфинитезимальная образующая, функция Кёнигса, неподвижные точки.*

Пусть $\mathfrak{P}$ — совокупность всех голоморфных отображений f единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ в себя. Тогда $\mathfrak{P}$ представляет собой топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной в $\mathbb{D}$ сходимости, роль единицы в которой играет тождественное преобразование $f(z) \equiv z$. Заметим, что $\mathfrak{P}$ содержит подгруппу $\mathfrak{I}$ дробно-линейных преобразований единичного круга $\mathbb{D}$ на себя. Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторая подполугруппа полугруппы $\mathfrak{P}$.

Определение 1. *Отображение $t \mapsto f^t$, действующее из аддитивной полугруппы $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R}\colon t \geqslant 0\}$ в полугруппу $\mathfrak{L}$, называется однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{L}$, если выполняются следующие условия:*

i) $f^0(z) \equiv z$;
ii) $f^{t+s}(z) = f^t \circ f^s(z)$ *при* $s, t \geqslant 0$;
iii) $f^t(z) \to z$ *локально равномерно в* $\mathbb{D}$ *при* $t \to 0$.

Известно, что всякая однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{L}$ дифференцируема по t [7] и характеризуется своей инфинитезимальной образующей

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z)\Big|_{t=0} = v(z)$$

посредством дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z) = v(f^t(z)) \tag{1}$$

с начальным условием $f^t(z)|_{t=0} = z$.

Определение 2. *Функция $f \in \mathfrak{L}$ вложима в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{L}$, если существует такая однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{L}$, что $f^1 = f$.*

Поскольку семейство $\{f^t\}_{t \geqslant 0}$ обладает свойством ii), то f^t при целых неотрицательных значениях t — есть натуральные итерации $f^n = f \circ f^{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$, функции $f = f^1$, а f^t, $t \geqslant 0$, называют дробными итерациями функции f.

Проблема вложимости, или, по-другому, проблема дробного итерирования имеет два аспекта: вопрос существования дробных итераций и вопрос способа их построения. Отметим, что общая проблема дробного итерирования имеет длительную историю, и ее решение во многом зависит от того, в каком классе функций она рассматривается. Исторически в ее исследовании выделяются три случая: локальный случай (см.: [14], [11]), когда областью определения функции является окрестность неподвижной точки; случай мероморфных функций (см.: [6], [10]), когда областью определения является вся комплексная плоскость, за исключением изолированных особых точек — полюсов; случай аналитических в некоторой области функций, принимающих значения из этой же области [обычно в качестве такой области выбирается единичный круг $\mathbb{D}$ (см. [8]) или полуплоскость]. В отличие от первых двух, третий случай более разнообразен по методам и результатам, что связано как с требованием принадлежности дробных итераций классу функций с заданными свойствами, так и с наличием неподвижных точек аналитической функции.

Если $f \in \mathfrak{P} \setminus \mathfrak{I}$, то по теореме Данжуа — Вольфа (см., например, [2]) существует единственная точка q, $|q| \leqslant 1$, такая, что $f^n(z) \to q$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ при $n \to \infty$. При этом, если q располагается внутри единичного круга $\mathbb{D}$, то $f(q) = q$, то есть q является неподвижной точкой функции f. В случае, когда q располагается на границе единичного круга $\mathbb{D}$, то есть лежит на единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$, то в этой точке существуют угловые пределы

$$f(q) = \lim_{z \to q} f(z)\,, \quad f\,'(q) = \lim_{z \to q} f\,'(z) = \lim_{z \to q} \frac{f(z) - q}{z - q}\,.$$

Кроме того, $f(q) = q$ и $0 < f\,'(q) \leqslant 1$, то есть q является граничной неподвижной притягивающей точкой. Точка q называется точкой Данжуа — Вольфа функции f и она является общей для всех итераций этой функции. Отметим, что в силу принципа гиперболической метрики (см., например, [5]) все другие неподвижные точки функции f, если они есть, лежат на единичной окружности $\mathbb{T}$.

В зависимости от того, является ли точка Данжуа — Вольфа функции f внутренней или граничной, исследование проблемы дробного итерирования связано с функциональными уравнениями Шрёдера и Абеля, соответственно, и их решениями, посредством которых могут определяться дробные итерации.

В данной работе проблема дробного итерирования рассматривается в классе $\mathfrak{P}_r[0]$, который представляет собой совокупность функций $f \in \mathfrak{P}$, сохраняющих начало координат и имеющих вещественные коэффициенты разложения в ряд Маклорена, то есть

$$\mathfrak{P}_r[0] = \left\{ f \in \mathfrak{P} \colon f(0) = 0,\ f^{(n)}(0) \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Через $\mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$ будем обозначать совокупность функций $f \in \mathfrak{P}_r[0]$, вложимых в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{P}_r[0]$.

Пусть $f \in \mathfrak{P} \setminus \mathfrak{I}$, $f(0) = 0$ и $f'(0) \neq 0$, тогда (см., например, [2]) существует предел

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(z)}{(f'(0))^n},$$

который представляет собой непостоянную аналитическую в единичном круге $\mathbb{D}$ функцию, являющуюся единственным решением функционального уравнения Шрёдера

$$F(f(z)) = f'(0)F(z) \tag{2}$$

в классе аналитических в $\mathbb{D}$ функций с нормировкой $F(0) = 0, F'(0) = 1$. Функция F называется функцией Кёнигса и может служить для получения натуральных итераций порождающей ее функции как решений функционального уравнения

$$F\left(f^n(z)\right) = \left(f'(0)\right)^n F(z).$$

Допустим теперь, что $t \mapsto f^t$ — однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}_r[0]$. В силу единственности решения задачи Коши (1) функции f^t, $t > 0$, однолистны в $\mathbb{D}$ и, следовательно, $\left(f^t\right)'(0) \neq 0$ (здесь и далее запись $\left(f^t\right)'(0)$ означает производную функции $f^t(z)$ по переменной z, вычисленную в точке $z = 0$). Поэтому (см. [2]) можно определить функцию Кёнигса F следующим образом

$$F(z) = \lim_{t\to\infty} \frac{f^t(z)}{\left(f^t\right)'(0)},$$

и она будет общей для всех f^t, $t > 0$. Непостоянная функция F, как предел последовательности однолистных функций, также является однолистной и удовлетворяет функциональному уравнению Шрёдера

$$F\left(f^t(z)\right) = \left(f^t\right)'(0)\, F(z). \tag{3}$$

В данной работе получено интегральное представление класса функций Кёнигса, отвечающих однопараметрическим полугруппам в $\mathfrak{P}_r[0]$. Отметим, что интегральное представление общего класса функций Кёнигса, отвечающих однопараметрическим полугруппам в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа — Вольфа $q \in \mathbb{D}$, получено в [4]. Также найдены необходимые условия вложимости функции $f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots$ из $\mathfrak{P}_r[0]$ в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{P}_r[0]$ в терминах ее первых трех коэффициентов c_1, c_2, c_3. Для $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$ получено аналитическое описание границ области изменения второго и третьего коэффициентов при фиксированном значении первого коэффициента. Определены функции $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$, соответствующие граничным точкам этой области.

Пусть v — инфинитезимальная образующая однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}_r[0]$. Получим равенство, связывающее функцию Кёнигса F однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}_r[0]$ и ее инфинитезимальную образующую v.

Дифференцируя (1) по z и полагая $z = 0$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(f^t\right)'(0) = v'(0)\left(f^t\right)'(0)$$

с начальным условием $\left(f^t\right)'(0)\big|_{t=0} = 1$, интегрирование которого по t приводит к равенству $\left(f^t\right)'(0) = e^{v'(0)t}$. Таким образом, уравнение (3) можно записать в виде

$$F\left(f^t(z)\right) = e^{v'(0)t}\, F(z).$$

Дифференцируя последнее равенство по t и полагая $t = 0$, получаем соотношение, связывающее функцию Кёнигса F и инфинитезимальную образующую v

$$F'(z)\,v(z) = v'(0)\,F(z). \tag{4}$$

Вид инфинитезимальной образующей v однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}_r[0]$ следует из результата Левнера [12] с учетом вещественности коэффициентов функций из $\mathfrak{P}_r[0]$:

$$v(z) = -\alpha z\,p(z), \tag{5}$$

где $\alpha > 0$ и $p \in C_r$. Под классом C_r понимается совокупность аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций p, удовлетворяющих условиям: $\forall z \in \mathbb{D}$ $\operatorname{Re} p(z) > 0$, $p(0) = 1$, и производные $p^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ Ясно, что $C_r \subset C$, где C — класс Каратеодори аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций h с положительной вещественной частью и нормировкой $h(0) = 1$.

Следует отметить, что поскольку необходимым условием вложимости функции $f \in \in \mathfrak{L}$ в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{L}$ является однолистность функции f, то равенство $f'(0) = 0$ влечет невложимость этой функции. При этом любая функция $f \in \mathfrak{P}_r[0]$, для которой $f'(0) < 0$, не вложима в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{P}_r[0]$, так как в этом случае невозможно выполнение соотношения $(f^t)'(0) \to 1$, при $t \to 0$, которое является следствием условия *iii*), без нарушения необходимого условия однолистности.

Следующая теорема дает интегральное представление класса функций Кёнигса, соответствующих функциям $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$.

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$, тогда ее функция Кёнигса F имеет вид*

$$F(z) = z \exp\left\{ \int\limits_{[-1,1]} \ln \frac{1}{1 - 2xz + z^2}\, d\mu(x) \right\} \tag{6}$$

с некоторой вероятностной мерой μ на $[-1, 1]$. При этом под логарифмом понимается непрерывная ветвь, принимающая значение 0 при $z = 0$.

Обратно, всякая функция F вида (6) является функцией Кёнигса для функций $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$, определяемых из равенства

$$f(z) = F^{-1}(\beta\, F(z)), \ 0 < \beta < 1.$$

Доказательство. Пусть $t \mapsto f^t$ — нетривиальная ($f^t(z) \not\equiv z$ при $t > 0$) однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}_r[0]$ и F — ее функция Кёнигса. Покажем, что функция F допускает представление (6) с некоторой вероятностной мерой μ на $[-1, 1]$. Так как F однолистна в единичном круге $\mathbb{D}$ и $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, то функция $F(z)/z$ не обращается в нуль в $\mathbb{D}$ и можно выделить однозначную ветвь логарифма $\ln(F(z)/z)$, которая обращается в нуль при $z = 0$. Применяя равенство (4), получаем

$$\frac{d}{dz} \ln \frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z}\left(\frac{z\,v'(0)}{v(z)} - 1\right).$$

Поскольку вместе с любой функцией $p \in C_r$ и функция $1/p \in C_r$, то инфинитезимальную образующую (5) можно записать в виде

$$v(z) = \frac{-\alpha z}{p(z)}\,.$$

Тогда
$$v'(0) = -\alpha$$
и
$$\frac{z\, v'(0)}{v(z)} - 1 = p(z) - 1\,.$$
Следовательно,
$$\frac{d}{dz} \ln \frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z}\left(p(z) - 1\right).$$
Воспользуемся теперь интегральным представлением функций $p \in C_r$ (см., например, [3, с. 516–518]):
$$p(z) = \int\limits_{[-1,1]} \frac{1 - z^2}{1 - 2xz + z^2}\, d\mu(x)\,, \tag{7}$$
где μ — вероятностная мера на $[-1,1]$. Тогда дифференциальное соотношение для функции Кёнигса можно преобразовать к следующему виду
$$\frac{d}{dz} \ln \frac{F(z)}{z} = 2 \int\limits_{[-1,1]} \frac{x - z}{1 - 2xz + z^2}\, d\mu(x).$$
Интегрируя последнее равенство по z и учитывая выбор ветви логарифма, получаем
$$\ln \frac{F(z)}{z} = \int\limits_{[-1,1]} \ln \frac{1}{1 - 2xz + z^2}\, d\mu(x).$$
Потенцируя это равенство, приходим к формуле (6) для функции Кёнигса, и необходимость доказана.

Для доказательства достаточности покажем, что при любой вероятностной мере μ на $[-1,1]$ формула (6) определяет функцию Кёнигса некоторой однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}_r[0]$. Дифференцируя равенство (6), получаем, что
$$z\,\frac{F'(z)}{F(z)} = \int\limits_{[-1,1]} \frac{1 - z^2}{1 - 2xz + z^2}\, d\mu(x)$$
есть функция из класса C_r. Таким образом, $\operatorname{Re}\left\{z\,\frac{F'(z)}{F(z)}\right\} > 0$ при $z \in \mathbb{D}$ и, значит, (см., например: [3], [13]) функция F является звездообразной в единичном круге $\mathbb{D}$, то есть она однолистна в $\mathbb{D}$ и отображает $\mathbb{D}$ на область, которая с каждой точкой $F(z)$, $z \in \mathbb{D}$, содержит отрезок $\{w(t) = t\,F(z)\colon 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Это свойство функции F позволяет определить семейство $\{f^t\}_{t \geqslant 0}$ следующим образом
$$f^t(z) = F^{-1}\left(e^{-t}\,F(z)\right)$$
при всех $t \geqslant 0$.

Непосредственно из (6) следует, что $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ и производные $F^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$, $n = 2, 3, \ldots$, поэтому $f^t \in \mathfrak{P}_r[0]$ и $\left(f^t\right)'(0) > 0$ при всех $t > 0$. Кроме того, функции семейства $\{f^t\}_{t\geqslant 0}$ образуют однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{P}_r[0]$, поскольку условия $i), iii)$ выполнены и для любых $s, t \geqslant 0$ имеем

$$f^{t+s}(z) = F^{-1}\left(e^{-(t+s)}F(z)\right) = F^{-1}\left(e^{-t}e^{-s}F(z)\right) =$$
$$= F^{-1}\left(e^{-t}F \circ F^{-1}\left(e^{-s}F(z)\right)\right) =$$
$$= F^{-1}\left(e^{-t}F\left(f^s(z)\right)\right) = f^t \circ f^s(z).$$

Остается показать, что функция F вида (6) является функцией Кёнигса однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}_r[0]$. Действительно,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f^t(z)}{\left(f^t\right)'(0)} = \lim_{t\to\infty} \frac{f^t(z)}{e^{-t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{F^{-1}\left(e^{-t}F(z)\right)}{e^{-t}} =$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{F^{-1}\left(e^{-t}F(z)\right)F(z)}{e^{-t}F(z)} = \left(F^{-1}\right)'(0)\,F(z) = F(z).$$

Теорема 1 доказана.

Полученное в теореме 1 интегральное представление класса функций Кёнигса, соответствующих функциям $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$, позволяет найти некоторые необходимые условия вложимости функции $f \in \mathfrak{P}_r[0]$ в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{P}_r[0]$ в терминах оценок ее начальных коэффициентов.

Выделим в пространстве $\mathbb{R}^2$ множество $\mathcal{C}(c_1)$ следующим образом:

$$\mathcal{C}(c_1) = \left\{(c_2, c_3) \in \mathbb{R}^2 \colon f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots,\ f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])\right\}.$$

Отметим, что $c_1 \in (0,1]$ и $c_1 = 1$ только в случае тождественного преобразования $f(z) \equiv z$. Оценка снизу для коэффициента c_1 следует из условия $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$, а оценка сверху — из леммы Шварца.

Следующая теорема дает аналитическое описание границ множества $\mathcal{C}(c_1)$.

Теорема 2. *Пусть $c_1 \in (0,1)$ фиксировано. Тогда $\mathcal{C}(c_1)$ представляет собой замкнутое множество в $\mathbb{R}^2$, ограниченное кривыми*

$$\gamma^+(c_1)\colon c_3 = \frac{1-3c_1}{2c_1\left(1-c_1\right)}\,c_2^2 + c_1\left(1-c_1^2\right), \text{ где } -2c_1(1-c_1) \leqslant c_2 \leqslant 2c_1(1-c_1),$$
$$\gamma^-(c_1)\colon c_3 = \frac{1}{c_1}\,c_2^2 - c_1\left(1-c_1^2\right), \text{ где } -2c_1(1-c_1) \leqslant c_2 \leqslant 2c_1(1-c_1).$$

Доказательство. Дифференцируя трижды функциональное уравнение Шрёдера (2) и учитывая условия $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, получаем соотношения для коэффициентов функции $f \in \mathfrak{P} \setminus \mathfrak{I}$, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$,

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{2}\,c_1\left(1-c_1\right)F''(0), \\ c_3 &= -\frac{1}{2}\,c_1\left(1-c_1\right)\left(c_1\left(F''(0)\right)^2 - \frac{1}{3}\left(1+c_1\right)F'''(0)\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Далее, дифференцируя равенство (6), получаем соотношение

$$z\,\frac{F'(z)}{F(z)} = p(z),$$

где $p \in C_r$, трехкратное дифференцирование которого с учетом условий $F(0) = 0,\ F'(0) = 1$ приводит к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} &F''(0) = 2\,p'(0), \\ &F'''(0) = 3\,(p'(0))^2 + \frac{3}{2}\,p''(0). \end{aligned} \tag{9}$$

Подставляя (9) в соотношения (8), получаем, что начальные коэффициенты функции $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$ имеют вид

$$\begin{aligned} &c_2 = c_1\,(1 - c_1)\,p'(0), \\ &c_3 = \frac{1}{4}\,c_1(1 - c_1)\left((2 - 6\,c_1)\,(p'(0))^2 + (1 + c_1)p''(0)\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Определим теперь область значений $\{p'(0),\, p''(0)\}$. Заметим, что для любых функций $p \in C_r$ и $h \in C$ справедливо соотношение

$$p(z) = \frac{1}{2}\left(h(z) + \overline{h(\overline{z})}\right).$$

Используя это соотношение, а также интегральное представление функций $h \in C$ (см., например, [13]):

$$h(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1 + \varkappa z}{1 - \varkappa z}\,d\nu(\varkappa)\,,$$

где ν — вероятностная мера на единичной окружности $\mathbb{T}$, получаем

$$\begin{aligned} &p'(0) = 2\,\mathrm{Re}\,\gamma_1, \\ &p''(0) = 4\,\mathrm{Re}\,\gamma_2, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\gamma_1,\ \gamma_2$ — первый и второй моменты функции $h \in C$

$$\gamma_1 = \int\limits_{\mathbb{T}} \varkappa\,d\nu(\varkappa),\ \ \gamma_2 = \int\limits_{\mathbb{T}} \varkappa^2\,d\nu(\varkappa).$$

Область взаимного изменения моментов γ_1 и γ_2 следует из теоремы Каратеодори — Тёплица (см., например, [1])

$$|\gamma_1| \leqslant 1,\ \ |\gamma_2 - \gamma_1^2| \leqslant \left(1 - |\gamma_1|^2\right),$$

что может быть записано в виде

$$\gamma_1 = \xi,\ \ \gamma_2 = \gamma_1^2 + \left(1 - |\gamma_1|^2\right)\eta, \tag{12}$$

где $|\xi| \leqslant 1,\ \ |\eta| \leqslant 1.$

Учитывая соотношения (11) и (12), получаем, что при фиксированном $p'(0) \in [-2, 2]$

$$\begin{aligned} &\max\{p''(0)\} = 4\max\left\{\mathrm{Re}\,\gamma_1^2 + \left(1 - |\gamma_1|^2\right)\right\} = 4, \\ &\min\{p''(0)\} = 4\min\left\{\mathrm{Re}\,\gamma_1^2 - \left(1 - |\gamma_1|^2\right)\right\} = 2\,(p'(0))^2 - 4. \end{aligned}$$

Итак, верхняя и нижняя границы области значений $\{p'(0),\, p''(0)\}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} p''(0) &= 4, \text{ где } \ -2 \leqslant p'(0) \leqslant 2, \\ p''(0) &= 2\,(p'(0))^2 - 4, \text{ где } \ -2 \leqslant p'(0) \leqslant 2, \end{aligned} \tag{13}$$

соответственно (см. рис. 1).

Подставляя теперь в равенства (10) соотношения (13), получаем уравнения кривых $\gamma^+(c_1)$, $\gamma^-(c_1)$. Теорема 2 доказана.

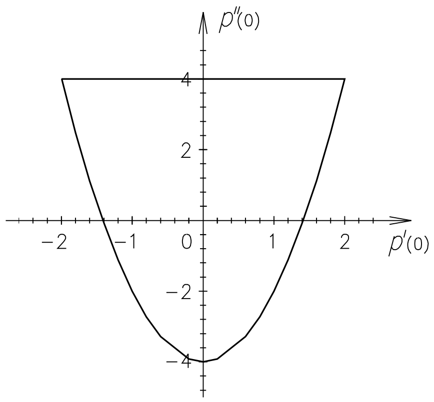

Рис. 1. Область значений $\{p'(0), p''(0)\}$

Поскольку однолистность является необходимым условием вложимости функции, то вопрос о содержательности полученных в теореме 2 оценок начальных коэффициентов функции $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$ был решен сравнением с соответствующими точными оценками в классе ограниченных однолистных функций с вещественными коэффициентами (см. [15]). Рисунок 2 является иллюстрацией этого сравнения: множество $\mathcal{C}(c_1)$ вкладывается в соответствующее множество $\mathcal{U}(c_1)$, построенное по точным оценкам в классе ограниченных однолистных функций с вещественными коэффициентами.

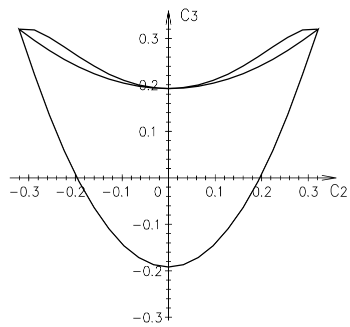

Рис. 2. Соотношение множеств $\mathcal{C}(c_1)$ и $\mathcal{U}(c_1)$ при $c_1 = 0,2$

Отметим, что в [9] сформулированы необходимые условия вложимости функции $f \in \mathfrak{P}[0]$, то есть $f \in \mathfrak{P}$, $f(0) = 0$, в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{P}[0]$, а также функции $f \in \mathfrak{P}_r[0]$ в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{P}_r[0]$ в терминах первых двух коэффициентов. Однако во втором случае отслеживание только первых двух коэффициентов не дает преимуществ при проверке на вложимость по сравнению с необходимым условием однолистности, поскольку множество $\mathcal{C} = \{(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \colon f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots,\ f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])\}$ совпадает с соответствующим множеством в классе ограниченных однолистных функций с вещественными коэффициентами.

Рассмотрим теперь вопрос об экстремальных функциях, то есть выясним, каким функциям $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$ соответствуют граничные точки множества $\mathcal{C}(c_1)$.

Теорема 3. *Пусть $c_1 \in (0,1)$ фиксировано и $\gamma^+(c_1)$, $\gamma^-(c_1)$ — кривые, определенные в теореме 2. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *в $\mathcal{C}(c_1)$ функции $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$ соответствует точка кривой $\gamma^+(c_1)$ тогда и только тогда, когда*
$$f(z) = F^{-1}\left(c_1 F(z)\right),$$
где F — функция Кёнигса, определяемая по формуле
$$F(z) = \frac{z}{(1+z)^{1-\lambda}(1-z)^{1+\lambda}}\,, \quad \lambda = \frac{c_2}{2c_1(1-c_1)}\,. \tag{14}$$

2) *в $\mathcal{C}(c_1)$ функции $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$ соответствует точка кривой $\gamma^-(c_1)$ тогда и только тогда, когда*
$$f(z) = F^{-1}\left(c_1 F(z)\right),$$
где F — функция Кёнигса, определяемая по формуле
$$F(z) = \frac{z}{1-2\lambda z + z^2}\,, \quad \lambda = \frac{c_2}{2c_1(1-c_1)}\,. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть функция $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$ соответствует некоторой точке кривой $\gamma^+(c_1)$. Тогда ее коэффициенты определяются условиями:
$$\begin{aligned} &c_2 \in [-2c_1(1-c_1),\, 2c_1(1-c_1)],\\ &c_3 = \frac{1-3c_1}{2c_1\,(1-c_1)}\, c_2^2 + c_1\left(1-c_1^2\right), \end{aligned}$$
что следует из теоремы 2. С другой стороны, эти коэффициенты связаны с величинами $p'(0)$ и $p''(0)$ по формулам (10). Отсюда получаем, что для функции $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$, соответствующей точке кривой $\gamma^+(c_1)$,
$$\begin{cases} p'(0) = \dfrac{c_2}{c_1(1-c_1)},\\ p''(0) = 4. \end{cases}$$
Из интегрального представления (7) функций класса C_r следует, что
$$\begin{cases} p'(0) = 2 \displaystyle\int\limits_{[-1,1]} x\, d\mu(x),\\ p''(0) = 8 \displaystyle\int\limits_{[-1,1]} x^2\, d\mu(x) - 4. \end{cases}$$

Таким образом, из последних двух систем получаем

$$\begin{cases} \int\limits_{[-1,1]} x\, d\mu(x) = \lambda, \\ \int\limits_{[-1,1]} x^2\, d\mu(x) = 1, \end{cases} \tag{16}$$

где $\lambda = c_2 / \left(2c_1(1-c_1)\right)$.

Из второго равенства системы (16) следует, что вероятностная мера μ на $[-1,1]$ сосредоточена в точках ± 1. Действительно, в противном случае нашлись бы $0<\epsilon<1$ и $0<\delta<1$ такие, что $\mu\left([-1+\delta, 1-\delta]\right) > \epsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} \int\limits_{[-1,1]} x^2\, d\mu(x) = \int\limits_{[-1,-1+\delta)} x^2\, d\mu(x) + \int\limits_{[-1+\delta,1-\delta]} x^2\, d\mu(x) + \int\limits_{(1-\delta,1]} x^2\, d\mu(x) \leqslant \\ \leqslant \mu\left([-1,-1+\delta)\right) + (1-\delta)^2 \mu\left([-1+\delta,1-\delta]\right) + \mu\left((1-\delta,1]\right) < \\ < 1 - \epsilon\left(1-(1-\delta)^2\right) < 1, \end{aligned}$$

но это противоречит второму равенству системы (16).

Итак,

$$\mu = (1-\beta)\delta_{-1} + \beta\delta_1,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1,$$

где δ_{-1} — мера Дирака, сосредоточенная в точке -1, δ_1 — мера Дирака, сосредоточенная в точке 1, и $\beta = (1+\lambda)/2$, что следует из первого равенства системы (16). Более точно, для функции $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$, соответствующей точке кривой $\gamma^+(c_1)$, в представлении функции Кёнигса (6) вероятностная мера μ имеет вид

$$\mu = \frac{1-\lambda}{2}\,\delta_{-1} + \frac{1+\lambda}{2}\,\delta_1, \ \text{ где } \ \lambda = \frac{c_2}{2c_1(1-c_1)}. \tag{17}$$

Подставляя теперь (17) в (6), получаем формулу (14), по которой определяется функция Кёнигса, которая связана с функцией $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$, соответствующей точке кривой $\gamma^+(c_1)$.

Рассуждая аналогично, получаем, что для функции $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$, соответствующей точке кривой $\gamma^-(c_1)$,

$$\begin{cases} p'(0) = \dfrac{c_2}{c_1(1-c_1)}, \\ p''(0) = 2\left(p'(0)\right)^2 - 4, \end{cases}$$

что может быть записано следующим образом

$$\begin{cases} \int\limits_{[-1,1]} x\, d\mu(x) = \lambda, \\ \int\limits_{[-1,1]} x^2\, d\mu(x) = \lambda^2, \end{cases} \tag{18}$$

где $\lambda = c_2 / \left(2c_1(1-c_1)\right)$.

Рассмотрим меру μ как распределение вероятностей некоторой случайной величины ζ. Тогда условия (18) означают, что математическое ожидание $\mathbb{E}\zeta = \lambda$ и дисперсия $\mathbb{D}\zeta = \mathbb{E}\zeta^2 - (\mathbb{E}\zeta)^2 = 0$. Следовательно, ζ почти наверное совпадает с $\mathbb{E}\zeta$, а мера μ сосредоточена в точке λ.

Итак, для функции $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$, соответствующей точке кривой $\gamma^-(c_1)$, в представлении функции Кёнигса (6) вероятностная мера μ есть мера Дирака δ, сосредоточенная в точке λ,

$$\mu = \delta_\lambda, \ \text{ где } \ \lambda = \frac{c_2}{2c_1(1-c_1)}, \tag{19}$$

и, значит, сама функция Кёнигса записывается по формуле (15).

Осталось отметить, что в силу уравнения Шрёдера (2) функция $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$, соответствующая точке кривой $\gamma^+(c_1)$ или кривой $\gamma^-(c_1)$, определяется по формуле

$$f(z) = F^{-1}\left(c_1 F(z)\right),$$

где, по доказанному выше, F — функция Кёнигса (14) или (15), соответственно. Необходимость утверждений 1)–2) доказана.

Пусть теперь $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$ и $f(z) = F^{-1}\left(c_1 F(z)\right)$, где F — функция Кёнигса, определяемая по формуле (14). Дифференцируя трижды равенство $f(z) = F^{-1}\left(c_1 F(z)\right)$, получаем, с учетом условий $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, соотношения (8) для коэффициентов функции f. Далее трехкратное дифференцирование функции Кёнигса (14) приводит к равенствам:

$$F''(0) = 4\lambda,$$
$$F'''(0) = 12\lambda^2 + 6,$$

подставляя которые в (8), получаем, что функция f соответствует точке $(c_2, c_3) \in \mathcal{C}(c_1)$, где

$$c_3 = \frac{1-3c_1}{2c_1\left(1-c_1\right)}\, c_2^2 + c_1\left(1-c_1^2\right),$$

то есть точке кривой $\gamma^+(c_1)$.

Точно также, пусть $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$ и $f(z) = F^{-1}\left(c_1 F(z)\right)$, где F — функция Кёнигса, задаваемая формулой (15). После трехкратного дифференцирования функции Кёнигса (15) получаем равенства:

$$F''(0) = 4\lambda,$$
$$F'''(0) = 24\lambda^2 - 6,$$

подстановка которых в (8) приводит к тому, что функция f соответствует точке $(c_2, c_3) \in$ $\in \mathcal{C}(c_1)$, где

$$c_3 = \frac{1}{c_1}\, c_2^2 - c_1\left(1-c_1^2\right),$$

то есть точке кривой $\gamma^-(c_1)$. Это завершает доказательство достаточности утверждений 1)–2) и теоремы 3.

Отметим, что функция $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$, соответствующая точке кривой $\gamma^+(c_1)$, отображает единичный круг $\mathbb{D}$ в себя с симметричными относительно вещественной оси

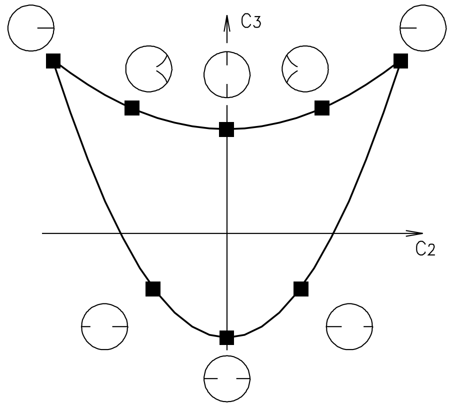

Рис. 3. Экстремальные функции множества $\mathcal{C}(c_1)$

разрезами, а функция $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0])$, соответствующая точке кривой $\gamma^-(c_1)$, отображает единичный круг $\mathbb{D}$ в себя с разрезами по вещественному диаметру. На рисунке 3 схематично показаны экстремальные функции множества $\mathcal{C}(c_1)$.

В заключение хотела бы выразить искреннюю благодарность научному руководителю — доктору физико-математических наук, профессору В.В. Горяйнову за помощь в работе, а также доктору физико-математических наук, профессору В.В. Старкову и кандидату физико-математических наук А.А. Полковникову за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер, Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею / Н. И. Ахиезер. — М. : ГИФМЛ, 1961. — 310 с.
2. Валирон, Ж. Аналитические функции / Ж. Валирон. — М. : ГИТТЛ, 1957. — 235 с.
3. Голузин, Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г. М. Голузин. — М. : Наука, 1966. — 628 с.
4. Горяйнов, В. В. Однопараметрические полугруппы аналитических функций, неподвижные точки и функция Кёнигса / В. В. Горяйнов, О. С. Кудрявцева // Мат. сб. — 2011. — № 7. — С. 43–74.
5. Ahlfors, L. V. Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory / L. V. Ahlfors. — N. Y. : McGraw-Hill Book Company, 1973. — 157 p.
6. Baker, I. N. Fractional iteration near a fixpoint of multiplier 1 / I. N. Baker // J. Australian Math. Soc. — 1964. — V. 4, № 2. — P. 143–148.
7. Berkson, E. Semigroups of analytic functions and composition operators / E. Berkson, H. Porta // Michigan Math. J. — 1978. — V. 25, № 1. — P. 101–115.
8. Cowen, C. C. Iteration and the solution of functional equations for functions analytic in the unit disk / C. C. Cowen // Trans. Amer. Math. Soc. — 1981. — V. 265, № 1. — P. 69–95.
9. Goryainov, V. V. Embedding iterates of analytic functions into continuous semigroups / V. V. Goryainov // International conference «Kolmogorov and contemporary mathematics» in commemoration of the centennial of A. N. Kolmogorov (25.IV.1903 – 20.X.1987). — 2003. — P. 170–171.
10. Karlin, S. Embedding iterates of analytic functions with two fixed points into continuous groups / S. Karlin, J. McGregor // Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — V. 132, № 1. — P. 137–145.

11. Königs, G. Recherches sur les intégrales des certaines equations fonctionelles / G. Königs // Ann. Ecole Norm. Sup. — 1884. — V. 1 (3). — P. 3–41.
12. Löwner, K. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises I / K. Löwner // Math. Ann. — 1923. — V. 89. — P. 103–121.
13. Pommerenke, Ch. Univalent functions / Ch. Pommerenke. — Göttingen : Vandenhoeck and Ruprecht, 1975. — 376 p.
14. Schröeder, E. Über itierte Funktionen / E. Schröeder // Math. Ann. — 1871. — V. 3. — P. 296–322.
15. Tammi, O. Extremum Problems for Bounded Univalent Functions / O. Tammi. — Berlin ; Heidelberg ; N. Y. : Springer–Verlag, 1978. — 313 p.

FRACTIONAL ITERATION OF FUNCTIONS ANALYTIC IN THE UNIT DISK, WITH REAL COEFFICIENTS

O.S. Kudryavtseva

The present paper deals with the problem of fractional iteration in a class of analytic functions mapping the unit disk into itself, preserving the origin and having real coefficients of the expansion in a Maclaurin series, in terms of the Koenigs function. An integral representation of the class of Koenigs functions which correspond to the functions of the studied class admitting fractional iteration in this class is obtained. Some necessary conditions for the existence of fractional iterates of functions of the studied class in terms of estimates of their initial coefficients are given.

Key words: *fractional iterates, one-parameter semigroup, infinitesimal generator, Koenigs function, fixed points.*