



УДК 514.75
ББК 22.151

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОЧТИ ARG-ДЕФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.И. Бодренко

В статье исследуется задача продолжения бесконечно малых почти ARG-деформаций поверхностей в аналитические деформации того же типа в евклидовых пространствах.

Ключевые слова: деформация поверхности, средняя кривизна, G-деформация, бесконечно малая деформация, аналитическая деформация.

Введение

Рассмотрим в евклидовом пространстве E^{n+1} , $n > 1$, замкнутую ориентируемую гиперповерхность F . Введем в E^{n+1} декартову прямоугольную систему координат (y^1, \dots, y^{n+1}) . Обозначим через $\vec{r} = \vec{r}(M)$, $M \in F$, радиус-вектор поверхности F , $\vec{n} = \vec{n}(M)$ — единичный вектор нормали к поверхности F в точке M . Пусть на F задана последовательность векторных полей $\vec{z}_{(k)} = \vec{z}_{(k)}(M)$, $M \in F, \forall k \in \mathbb{N}$, функция $\gamma = \gamma(M)$, $M \in F$. Пусть дано число $\lambda \in \mathbb{R}$. \mathbb{N} и \mathbb{R} — множества натуральных и действительных чисел.

Определение 1. Деформация $\{F^\varepsilon\}$ гиперповерхности F , определяемая уравнением:

$$F^\varepsilon : \vec{r}^\varepsilon(M) = \vec{r}(M) + \vec{z}_{(1)}(M)\varepsilon, \forall M \in F,$$

где ε — параметр деформации; \vec{r}^ε — радиус-вектор поверхности F^ε , называется бесконечно малой почти ареально-рекуррентной G-деформацией (коротко почти ARG-деформацией), если выполнены условия:

1) вариация $\delta(d\sigma)$ элемента площади $d\sigma$ поверхности F удовлетворяет соотношению: $\delta(d\sigma) = Hn(\lambda c_{(1)} + \gamma)d\sigma$, где λ называется коэффициентом рекуррентности деформации, $H = H(M)$, $M \in F$ — средняя кривизна F в точке M , $c_{(1)} = \langle \vec{z}_{(1)}, \vec{n} \rangle$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в E^{n+1} ;

Бодренко А.И., 2012
©

2) рассматриваемая деформация является G -деформацией (см. [2]), то есть при деформации сохраняется грасманов образ гиперповерхности F в том смысле, что касательные плоскости переносятся параллельно.

Определение 2. Деформация $\{F_\varepsilon\}$ гиперповерхности F , определяемая уравнением:

$$F_\varepsilon : \vec{r}_\varepsilon(M) = \vec{r}(M) + \sum_{k=1}^{\infty} \vec{z}_{(k)}(M) \varepsilon^k, \forall M \in F, \varepsilon \in [0, 1), \quad (1)$$

называется аналитической почти ARG -деформацией, если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} z_{(k)}^\alpha \varepsilon^k$, $\alpha = \overline{1, n+1}$, где через $z_{(k)}^\alpha$ обозначены компоненты вектора $\vec{z}_{(k)}$ во введенной системе координат в E^{n+1} , сходятся на промежутке $\varepsilon \in [0, 1)$ и выполнены условия:

1) изменение $\Delta_\varepsilon(d\sigma)$ элемента площади $d\sigma$ гиперповерхности F удовлетворяет соотношению:

$$\Delta_\varepsilon(d\sigma) = Hn(\lambda c_\varepsilon + \gamma\varepsilon)d\sigma, \quad (2)$$

где $c_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} c_{(k)} \varepsilon^k$, $c_{(k)} = \langle \vec{z}_{(k)}, \vec{n} \rangle$;

2) рассматриваемая деформация является G -деформацией в указанном выше смысле.

В [7] исследовались свойства бесконечно малых ARG -деформаций, в [1] и [9] изучались свойства непрерывных почти ARG -деформаций. Известна проблема продолжения бесконечно малых изгибаний в аналитические ([5]), состоящая в следующем. Для всякого ли поля бесконечно малого изгибания $\vec{z}_{(1)}$ поверхности можно указать поля $\vec{z}_{(2)}, \vec{z}_{(3)}, \dots$ такие, чтобы деформация вида (1) определяла аналитические изгибания поверхности? В такой постановке эта задача нашла положительное решение для некоторых классов поверхностей, например, в работах [4] и [3]. Поэтому естественно возникает вопрос о постановке аналогичной задачи для почти ARG -деформаций: при каких условиях бесконечно малая почти ARG -деформация допускает продолжение в аналитическую почти ARG -деформацию? Исследованию этой задачи посвящена настоящая статья.

Рассмотрим евклидово пространство E^n . Введем в E^n декартову прямоугольную систему координат (x^1, \dots, x^n) . Рассмотрим $C^{k,\nu}(\overline{D})$, $k \geq 0, 0 < \nu < 1$, — пространство Гельдера, где D — открытый шар в E^n , с центром в начале координат, радиуса 1. Функция f , определенная на D , принадлежит классу $C^{k,\nu}(\overline{D})$ (см. [6]), если f имеет непрерывные частные производные до k -го порядка включительно и конечное значение величины:

$$\|f\|_{(D)k,\nu} = \sum_{|i|=0}^k \sup_{x \in D} |\partial^{|i|} f(x)| + \sum_{|i|=k} \sup_{x_1, x_2 \in D} \frac{|\partial^{|i|} f(x_1) - \partial^{|i|} f(x_2)|}{\|x_1 - x_2\|^\nu}.$$

Символ $\partial^{|i|} f(x)$ означает частную производную функции $f(x)$ вида $\frac{\partial^{|i|} f(x)}{\partial^{i_1} x^1 \dots \partial^{i_n} x^n}$, где $|i| = i_1 + \dots + i_n$ — порядок производной. Для $x \in E^n$ использовано обозначение $\|x\| = (\sum_{i=1}^n (x^i)^2)^{1/2}$, где (x^1, \dots, x^n) — координаты точки x .

Определение 3. Конечная совокупность $\{(U_i, h_i)\}_{i=\overline{1, N}}$ карт F , с координатными окрестностями U_i и координатными отображениями h_i , называется допустимым атласом класса $C^{k,\nu}$ поверхности F , если:

- 1) семейство множеств $\{(U_i)\}_{i=\overline{1, N}}$ образует открытое покрытие F ;
- 2) h_i есть гомеоморфизм U_i на D ;

3) обратное отображение $h_i^{-1}(x) \equiv (f^1(x), \dots, f^{n+1}(x)), x \in D$, удовлетворяет условию $f^\alpha \in C^{k,\nu}(\overline{D}), \alpha = \overline{1, n+1}$;

4) при $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ отображение $h_j \circ h_i^{-1}$ есть диффеоморфизм гладкости k множества $h_i(U_i \cap U_j)$ на $h_j(U_i \cap U_j)$.

Пусть F имеет допустимый атлас $\{(U_i, h_i)\}_{i=\overline{1, N}}$ класса $C^{3,\nu}$. На поверхности F рассмотрим пространство Гельдера $C^{p,\nu}(F), p \geq 0$.

Определение 4. Функция f , определенная на F , принадлежит классу $C^{p,\nu}(F)$, если $f \circ h_i^{-1} \in C^{p,\nu}(\overline{D}) \forall i = \overline{1, N}$. Норму в пространстве $C^{p,\nu}(F)$ определяем так: $\|f\|_{p,\nu(F)} = \max_i \|f \circ h_i^{-1}\|_{p,\nu(D)}$.

Пусть $\gamma \in C^{0,\nu}(F)$. Будем говорить, что поверхность F допускает аналитические почти ARG-деформации в классе $C^{l,\nu}, l \geq 0$, если $z_{(k)}^\alpha \in C^{l,\nu}(F), \alpha = \overline{1, n+1}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Пусть F не имеет действительных асимптотических направлений. Тогда, не нарушая общности, ориентируем поверхность F единичным вектором нормали \vec{n} так, чтобы ее средняя кривизна H была положительной.

Теорема 1. Для гиперповерхности F существует не более чем счетное множество действительных чисел $\Lambda = \{\lambda_s, s = 1, 2, \dots : -1 = \lambda_1 < \lambda_2 < \dots\}$, не имеющее конечных предельных точек, такое, что при $\lambda \notin \Lambda$ верны утверждения:

1) гиперповерхность F допускает единственную бесконечно малую почти ARG-деформацию с коэффициентом рекуррентности λ , в классе $C^{1,\nu}$;

2) существует такое число $M > 0$, зависящее от поверхности F , ее допустимого атласа, чисел ν, n, λ , что если функция γ удовлетворяет условию $\|\gamma\|_{(F)0,\nu} < M$, то гиперповерхность F допускает единственное продолжение бесконечно малой почти ARG-деформации в аналитическую деформацию того же типа, с коэффициентом рекуррентности λ , в классе $C^{1,\nu}$.

1. Вывод уравнений почти ARG-деформаций

Пусть (U, h) — произвольная карта допустимого атласа $\{(U_i, h_i)\}_{i=\overline{1, N}}$ поверхности F . Тогда F локально задается системой уравнений

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^n), (x^1, \dots, x^n) \in D, f^\alpha \in C^{3,\nu}(\overline{D}), \alpha = \overline{1, n+1}.$$

Будем пользоваться обозначениями, предложенными в книге [8]. Пусть $y_\varepsilon^\alpha, y^\alpha, n^\alpha$ — компоненты векторов $\vec{r}_\varepsilon, \vec{r}, \vec{n}$ во введенной системе координат в E^{n+1} , соответственно. Положим

$$z_{(k)}^\alpha = a_{(k)}^i y_{,i}^\alpha + c_{(k)} n^\alpha, \alpha = \overline{1, n+1}, \forall k \in \mathbb{N},$$

где $c_{(k)} = c_{(k)}(M), a_{(k)}^i = a_{(k)}^i(M)$ — неизвестные функции, знак i означает ковариантную производную по переменной x^i в метрике гиперповерхности.

Обозначим через g_{ij} — метрический тензор гиперповерхности F , b_{ij} — тензор второй основной формы гиперповерхности F . Получим

$$z_{(k),j}^\alpha = (a_{(k),j}^i - c_{(k)} b_{jm} g^{mi}) y_{,i}^\alpha + (a_{(k)}^i b_{ij} + c_{(k),j}) n^\alpha. \quad (3)$$

Так как F не имеет действительных асимптотических направлений и ориентирована так, что ее средняя кривизна H положительна, то ее вторая основная форма положительно определена. Обозначим через \tilde{b}^{ij} тензор, обратный тензору b_{ij} , то есть удовлетворяющий условию $\tilde{b}^{ij} b_{kj} = \delta_k^i$, где δ_k^i — символы Кронекера. Тогда получим, что условие сохранения грассманова образа имеет вид:

$$a_{(k)}^i = -\tilde{b}^{ij} \partial_j c_{(k)}, i = \overline{1, n}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

где символ ∂_j означает частную производную по переменной x^j .

Условие (2) эквивалентно следующей системе соотношений:

$$\delta^k g = 2\lambda n H c_{(k)} g + T_{(k)}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

где $g = \det \|g_{ij}\|$, $\delta^k g$ — вариация k -го порядка величины g при деформации $\{F_\varepsilon\}$, $T_{(1)} = 2nH\gamma g$,

$$T_{(k)} = (nH)^2 g (2\lambda \gamma c_{(k-1)} + \gamma^2 W_{(k-1)} + \lambda^2 \sum_{l=1}^{k-1} c_{(l)} c_{(k-l)}), k \geq 2, \quad (6)$$

где $W_{(1)} = 1, W_{(k)} = 0$ при $k \geq 2$.

Используя определение вариации k -го порядка, имеем:

$$\delta^k g_{ij} = \delta_{\alpha\beta} (y^\alpha, i z_{(k)}^\beta, j + y^\beta, j z_{(k)}^\alpha, i) + Q_{(k)ij}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

где $\delta_{\alpha\beta} = 1$, при $\alpha = \beta$, $\delta_{\alpha\beta} = 0$, при $\alpha \neq \beta$,

$$Q_{(1)ij} = 0, Q_{(k)ij} = \delta_{\alpha\beta} \sum_{l=1}^{k-1} z_{(l)}^\alpha, i z_{(k-l)}^\beta, j, k \geq 2. \quad (8)$$

Используя свойства определителя, выразим вариацию $\delta^k g$ через вариации элементов g_{ij} :

$$\delta^k g = 2g g^{ij} \delta_{\alpha\beta} y^\alpha, i z_{(k)}^\beta, j + g g^{ij} Q_{(k)ij} + P_{(k)}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

где для удобства введены следующие обозначения: $P_{(1)} = 0$,

$$P_{(k)} = \sum_{s=2}^n \sum_{I_s, J_s} (-1)^{\text{sgn}(I_s J_s)} M_{I_s J_s} \sum_{\substack{l_1 + \dots + l_s = k \\ l_1, \dots, l_s \geq 1}} \left(\prod_{p=1}^s \delta^{l_p} g_{i_p j_p} \right), k \geq 2, \quad (10)$$

суммирование ведется по всевозможным размещениям индексов $I_s = (i_1, \dots, i_s)$ и всевозможным сочетаниям индексов $J_s = (j_1, \dots, j_s)$. Индексы $i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_s$ могут принимать значения от 1 до n . Величина $M_{I_s J_s}$ есть минор $(n-s)$ -го порядка матрицы $\|g_{ij}\|$, получающийся вычеркиванием из нее строк и столбцов с номерами i_1, \dots, i_s и j_1, \dots, j_s , соответственно. $(-1)^{\text{sgn}(I_s J_s)}$ — знак, с которым входит в разложение определителя g слагаемое вида $M_{I_s J_s} \prod_{p=1}^s g_{i_p j_p}$.

Рассмотрим на F дифференциальный оператор L , записываемый в координатной форме в виде:

$$L = -\frac{1}{nH\sqrt{g}} \partial_k (\sqrt{g} \tilde{b}^{ik} \partial_i) + 1.$$

Учитывая формулы $nH = g^{im} b_{im}$, $\partial_i (\ln \sqrt{g}) = \Gamma_{ij}^j$, где Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля гиперповерхности F в метрике g_{ij} , и полагая $\mu = \lambda + 2$, подставим (9) в (5). Получаем уравнения, описывающие аналитические почти ARG-деформации гиперповерхности F , с коэффициентом рекуррентности λ .

$$Lc_{(p)} = \mu c_{(p)} + (T_{(p)} - g g^{ij} Q_{(p)ij} - P_{(p)}) / (2nH g), \forall p \in \mathbb{N}, \quad (11)$$

где $T_{(p)}, Q_{(p)ij}, P_{(p)}$ определены формулами (6), (8) и (10), с учетом формул (3), (4) и (7).

Уравнение бесконечно малых почти ARG-деформаций гиперповерхности F описывается уравнением (11) при $p = 1$.

2. Доказательство теоремы 1

Доказательство. Применяя результаты из [7] и [6], получим, что если поверхность F имеет допустимый атлас класса $C^{3,\nu}$, то существует не более чем счетное множество действительных чисел $\Pi = \{\mu_s, s = 1, 2, \dots : 1 = \mu_1 < \mu_2 < \dots\}$, не имеющее конечных предельных точек, такое, что при $\mu \notin \Pi$ операторное уравнение $Lf = \mu f + \varphi, \varphi \in C^{0,\nu}(F)$ на F относительно неизвестной функции f имеет единственное решение класса $C^{2,\nu}(F)$. Положим $\Lambda = \{\lambda_s : \lambda_s = \mu_s - 2, s = 1, 2, \dots\}$ и зафиксируем число $\lambda \notin \Lambda$. Тогда существует единственная бесконечно малая почти ARG-деформация с коэффициентом рекуррентности λ гиперповерхности F в классе $C^{1,\nu}$. Утверждение 1) теоремы доказано.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Построим последовательность полей деформаций $\{z_{(k)}^\alpha\}_{k=1}^\infty$ по функции $c_{(1)}$, которая является решением уравнения (11) при $p = 1$. Найдем поле деформации $z_{(k)}^\alpha, k \geq 2$, считая поля $z_{(1)}^\alpha \dots z_{(k-1)}^\alpha$ известными из уравнений (4) и (11) при $p = 1, 2, \dots, k - 1$. Получим, что если функции $c_{(1)}, \dots, c_{(k-1)}, k \geq 2$, принадлежат классу $C^{2,\nu}(F)$, то функции $T_{(k)}, Q_{(k)ij}, P_{(k)}$ определены и принадлежат классу $C^{0,\nu}(F)$. Последовательность искомым тензорных полей деформации $z_{(k)}^\alpha$ класса $C^{1,\nu}(F)$ построена.

Лемма 1. Пусть функция $f \in C^{2,\nu}(F)$ является решением уравнения $Lf = \mu f + \varphi$ при $\mu \neq 1, \varphi \in C^{0,\nu}(F)$. Тогда имеет место оценка: $\|f\|_{(F)2,\nu} \leq K_0 \|\varphi\|_{(F)0,\nu}$, где постоянная K_0 определяется поверхностью F , числами μ, n, ν и атласом $\{(U_i, h_i)\}_{i=\overline{1,N}}$.

Доказательство. В силу вида оператора L имеет место неравенство Шаудера (см. [6]):

$$\|f \circ h_i^{-1}\|_{(D)2,\nu} \leq K_i (\|\varphi \circ h_i^{-1}\|_{(D)0,\nu} + \max_D |f \circ h_i^{-1}| + \|f \circ h_i^{-1}\|_{(\partial D)2,\nu}), i = \overline{1, N}.$$

Используя определения нормы в пространстве Гельдера (см. [6]), свойства атласа $\{(U_i, h_i)\}_{i=\overline{1,N}}$ и тот факт, что поверхность F является замкнутой, получим

$$\|f \circ h_i^{-1}\|_{(\partial D)2,\nu} \leq M_0 \max_{j=\overline{1,N}} \|f \circ h_j^{-1}\|_{(D)2,\nu}, \forall i = \overline{1, N}.$$

При этом постоянные $M_0, K_i, i = \overline{1, N}$ определяются поверхностью F , числами μ, n, ν и атласом $\{(U_i, h_i)\}_{i=\overline{1,N}}$. Имеем неравенство ([6]):

$$\max_D |f \circ h_i^{-1}| \leq \max \left(\max_{\partial D} |f \circ h_i^{-1}|; \max_D \frac{|\varphi \circ h_i^{-1}|}{|\mu - 1|} \right).$$

Так как F — компакт, то $\exists M^* \in F : |f(M^*)| = \max_F |f|$. Значит, существует окрестность U_l такая, что $M^* \in U_l$. Но тогда получим оценку:

$$\max_D |f \circ h_i^{-1}| \leq \max_D |f \circ h_l^{-1}| \leq \max_D \frac{|\varphi \circ h_l^{-1}|}{|\mu - 1|}, \forall i = \overline{1, N}.$$

Используя приведенные выше неравенства, получим доказательство леммы 1.

Покажем, что ряды $\sum_{k=1}^\infty z_{(k)}^\alpha \varepsilon^k, \alpha = \overline{1, n+1}$ сходятся на промежутке $\varepsilon \in [0, 1)$.

Для норм функций $c_{(k)}$ в пространстве $C^{2,\nu}(F)$, используя лемму, получим оценки:

$$\|c_{(1)}\|_{(F)2,\nu} \leq M_1 \|\gamma\|_{(F)0,\nu}, \|c_{(2)}\|_{(F)2,\nu} \leq M_2 \|\gamma\|_{(F)0,\nu}^2,$$

$$\begin{aligned} \|c_{(k)}\|_{(F)2,\nu} &\leq K \left(\frac{1}{2} \|\gamma\|_{(F)0,\nu} \|c_{k-1}\|_{(F)2,\nu} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{k-1} \|c_{(l)}\|_{(F)2,\nu} \|c_{(k-l)}\|_{(F)2,\nu} + \right. \\ &\left. + \sum_{s=2}^n \sum_{\substack{l_1+\dots+l_s=k \\ l_1, \dots, l_s \geq 1}} \prod_{p=1}^s (\|c_{(l_p)}\|_{(F)2,\nu} + \sum_{l=1}^{l_p-1} \|c_{(l)}\|_{(F)2,\nu} \|c_{(l_p-l)}\|_{(F)2,\nu}) \right), k \geq 3. \end{aligned}$$

При этом постоянные M_1, M_2, K определяются поверхностью F , числами μ, n, ν и атласом $\{(U_i, h_i)\}_{i=\overline{1, N}}$. Обозначим $q = \frac{4}{3}\pi^2$. Введем в рассмотрение новую постоянную S . Выберем постоянную S достаточно большой, удовлетворяющей неравенствам:

$$\frac{2SK + 1}{(2SK)^2 q} < 1, \frac{(2SK + 1)^2 (q^n - q)}{S^3 (2K)^2 (q - 1)} \leq 1, S > 1. \quad (12)$$

Пусть функция γ такова, что ее норма в пространстве $C^{0,\nu}(F)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\|\gamma\|_{(F)0,\nu} \leq \min\left(1/(2M_1 SK q), 1/(2SK q), 1/(\sqrt{8M_2 SK q})\right).$$

Покажем, что в этом случае нормы функций $c_{(p)}$ в пространстве $C^{2,\nu}(F)$ удовлетворяют следующему неравенству:

$$\|c_{(p)}\|_{(F)2,\nu} \leq \frac{1}{2SK qp^2}, \forall p \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

Очевидно, что нормы функций $c_{(1)}$ и $c_{(2)}$ в пространстве $C^{2,s}(F)$ удовлетворяют неравенству (13). Предположим, что это неравенство выполняется для $p = \overline{1, k-1}$, $k \geq 2$, покажем, что оно выполняется при $p = k$.

Используя метод математической индукции, проверяем верность следующего неравенства при $k \geq 2$ для $1 \leq s \leq k$:

$$\sum_{\substack{l_1+\dots+l_s=k \\ l_1, \dots, l_s \geq 1}} \frac{1}{l_1^2 \dots l_s^2} \leq \frac{q^{s-1}}{k^2}. \quad (14)$$

Принимая во внимание неравенства (12) и (14), получим:

$$\begin{aligned} \|c_{(k)}\|_{(F)2,\nu} &\leq K \left(\frac{1}{(2SK)^2 q k^2} + \sum_{s=2}^n \sum_{\substack{l_1+\dots+l_s=k \\ l_1, \dots, l_s \geq 1, s \leq k}} \frac{1}{l_1^2 \dots l_s^2} \left(\frac{2SK + 1}{(2SK)^2 q} \right)^s \right) \leq \\ &\leq K \left(\frac{1}{(2SK)^2 q k^2} + \left(\frac{2SK + 1}{(2SK)^2 q} \right)^2 \frac{(q^n - q)}{(q - 1) k^2} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{4SK q k^2} + \frac{K}{4SK^2 q^2} \leq \frac{1}{2SK q k^2}. \end{aligned}$$

Поэтому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|c_{(k)}\|_{(F)2,\nu} \varepsilon^k$ сходится на промежутке $\varepsilon \in [0, 1)$. Следовательно, в силу формулы (4), сходятся и ряды $\sum_{k=1}^{\infty} z_{(k)}^{\alpha} \varepsilon^k$, $\alpha = \overline{1, n+1}$, на промежутке $\varepsilon \in [0, 1)$.

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бодренко, А. И. Непрерывные почти ARG -деформации гиперповерхностей в евклидовом пространстве / А. И. Бодренко // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1996. — № 2. — С. 13–16.
2. Зубков, А. Н. Непрерывные почти ARG -деформации гиперповерхностей в евклидовом пространстве / А. Н. Зубков, В. Т. Фоменко // Математические заметки. — 1989. — Т. 45, № 1. — С. 20–27.
3. Исанов, Т. Г. О продолжении бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны / Т. Г. Исанов // Сибирский математический журнал. — 1979. — Т. 20, № 6. — С. 1261–1268.
4. Колегаева, Е. М. О продолжении бесконечно малых изгибаний поверхностей в аналитические изгибания при внешних связях / Е. М. Колегаева, В. Т. Фоменко // Математические заметки. — 1989. — Т. 45, № 2. — С. 30–39.
5. Кон-Фоссен, С. Э. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом / С. Э. Кон-Фоссен. — М. : Физматгиз, 1959. — 304 с.
6. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. — М. : Наука, 1973. — 576 с.
7. Фоменко, В. Т. ARG -деформации гиперповерхностей в римановом пространстве / В. Т. Фоменко // Ред. Сиб. мат. журн. Деп. в ВИНТИ 16.11.1990. — 1990. — № 5805. — С. 1–22.
8. Эйзенхарт, Л. П. Риманова геометрия / Л. П. Эйзенхарт. — М. : Изд-во ин. лит., 1948. — 316 с.
9. Bodrenko, A. I. Some properties of continuous almost ARG -deformations / A. I. Bodrenko // Russian Mathematics. — 1996. — V. 40, № 2. — P. 11–14.

**ANALYTIC ALMOST ARG -DEFORMATIONS OF SURFACES
IN EUCLIDEAN SPACES**

A.I. Bodrenko

The problem of analytic continuation of infinitesimal almost ARG -deformations of surfaces in Euclidean spaces is studied in this article.

Key words: *deformation of surface, mean curvature, G -deformation, infinitesimal deformation, analytical deformation.*