УДК 514.772.2+517.97
ББК 22.151

ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ [1]

Н.М. Полубоярова

В статье рассматриваются экстремальные поверхности вращения для функционалов типа площади, для которых вычислены первая и вторая вариации. Для n-мерных поверхностей вращения доказаны признаки устойчивости и неустойчивости на основании определения и в терминах специальных интегралов.

Ключевые слова: *функционал типа площади, вариация функционала, экстремальная поверхность, устойчивая (неустойчивая) экстремальная поверхность, p-минимальная поверхность.*

Введение

Постановка задачи. Пусть M — n-мерное связное ориентируемое многообразие класса C^2 без края. Рассмотрим гиперповерхность $\mathcal{M} = (M, u)$ без края, полученную C^2-вложением $u : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, и C^2–гладкую функцию $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\Phi(-\xi) = \Phi(\xi)$. Если обозначить через ξ поле единичных нормалей к поверхности $\mathcal{M}$, то для любой C^2-гладкой поверхности $\mathcal{M}$ определена величина

$$F(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \Phi(\xi)\, d\mathcal{M}, \tag{1}$$

которая не зависит от выбора нормали ξ. Функционал (1) будем называть **функционалом типа площади.**

Основной объект данного исследования — экстремали функционала (1). Заметим, что при $\Phi(\xi) \equiv 1$ ими являются минимальные поверхности.

Цель работы: получение признаков устойчивости и неустойчивости экстремальных поверхностей $\mathcal{M}$.

О подходах к решению подобных задач. Под устойчивостью будем понимать знакоопределенность второй вариации функционала типа площади при бесконечно малых деформациях поверхности. Напомним, что для минимальных поверхностей устойчивость означает положительную определенность второй вариации объема. В рассматриваемых нами случаях знак второй вариации для локальных вариаций может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от свойств функции $\Phi(\xi)$. Из этих соображений понятие устойчивости определяем как способность второй вариации сохранять знак на множестве всех допустимых вариаций, подобно работе [4] для поверхностей нулевой средней кривизны в искривленных лоренцевых произведениях. Поэтому для некоторых функций $\Phi(\xi)$ следует рассматривать задачу на минимум функционала $F(\mathcal{M})$, а для некоторых — на максимум.

Устойчивость подмногообразий нулевой средней кривизны в римановых многообразиях изучена довольно глубоко. Ей посвящены работы Х. Барбоса и М. до Кармо, Х. Лоусона, А.В. Погорелова, Дж. Саймонса [10], А.А. Тужилина [7], А.Т. Фоменко [8] и др. Для минимальных поверхностей в 3-мерном евклидовом пространстве явление неустойчивости рассматривал еще Г.А. Шварц в XIX веке. В псевдоримановых многообразиях задачи устойчивости стали решаться сравнительно недавно, но и здесь есть интересные подходы к решению и важные результаты.

Стоит заметить, что исследования проводятся различными методами. Приведем некоторые из них. Х. Барбоса и М. до Кармо показали, что ориентируемая минимальная поверхность в $\mathbb{R}^3$, у которой площадь образа гауссова отображения меньше, чем 2π, устойчива. До Кармо и Пенг дали обобщение проблемы Бернштейна в терминах устойчивости: плоскость — единственная полная устойчивая минимальная поверхность в $\mathbb{R}^3$, а в пространстве Лобачевского существуют однопараметрические семейства таких поверхностей. В работах А.А. Тужилина такие семейства подробно описаны с помощью понятия «индекс», а индекс минимальных поверхностей вращения в пространстве Лобачевского исследуется методом рядов Фурье, например в [7]. Исследования индекса компактных и некомпактных минимальных поверхностей и определение устойчивости можно также найти и в работах Х. Лоусона, А.Т. Фоменко, А.В. Тырина, Д. Фишер-Колбри. В работах В.М. Миклюкова, В.А. Клячина, В.Г. Ткачева применяется емкостная техника для определения устойчивости поверхностей.

1. Основные понятия

Пусть V — C^2-гладкое векторное поле, определенное в окрестности поверхности $\mathcal{M}$, такое, что $V|_{\mathcal{M}} = h{\cdot}\xi$, где $h \in C_0^1(\mathcal{M})$, ξ — поле единичных нормалей к поверхности, при этом предполагается, что интегральные кривые поля V лежат на прямых линиях и вдоль них выполнено $|V| = \mathrm{const}$.

Ясно, что если поверхность $\mathcal{M}$ вложена, то любое векторное поле $V = h{\cdot}\xi$, заданное вдоль $\mathcal{M}$, можно продолжить в некоторую окрестность $\mathcal{M}$ так, что будут выполнены сформулированные выше условия. Заметим, что согласно работе [10] вторая вариация не зависит от выбора продолжений.

Пусть $U(\mathcal{M})$ — окрестность поверхности $\mathcal{M}$, в которой определено поле V и однопараметрическая группа локальных диффеоморфизмов $g_t(x) : U(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}^{n+1}$, порожденная векторным полем V. То есть $g_t(x)$ есть решение задачи Коши:

$$\frac{dg_t(x)}{dt} = V(g_t(x)), \;\; g_t(x)|_{t=0} = x.$$

Положим $\mathcal{M}_t = g_t(\mathcal{M})$. Ясно, что $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$.

Определение 1. *Поверхность $\mathcal{M}$ является стационарной, если первая вариация функ-*

ционала (1) равна нулю, то есть

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathcal{M}_t}\Phi(\xi)\,d\mathcal{M}_t\Bigg|_{t=0}=0.$$

Определение 2. *Стационарная поверхность $\mathcal{M}$ будет устойчива, если вторая вариация функционала (1)*

$$\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_{\mathcal{M}_t}\Phi(\xi)\,d\mathcal{M}_t\Bigg|_{t=0}$$

знакоопределена при всех бесконечно малых деформациях $\mathcal{M}_t$ поверхности $\mathcal{M}$, иначе поверхность $\mathcal{M}$ — неустойчива.

Замечание. В случае когда вторая вариация стационарной поверхности локально знакоопределена, то есть вариации с малым носителем дают одинаковый знак, будем называть поверхность **экстремальной**. Далее будут рассматриваться только экстремальные поверхности.

В работе [3] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Поверхность $\mathcal{M}$ класса C^2 является экстремалью функционала (1) тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=1}^{n}k_iG(E_i,E_i)=0. \tag{2}$$

Экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ устойчива (неустойчива), если для любой функции $h(x)\in C_0^1(\mathcal{M})$ знакоопределена (не является знакоопределенной) квадратичная форма

$$\int\limits_{\mathcal{M}}\left\{G(\nabla h,\nabla h)-h^2\sum_{i=1}^{n}k_i^2G(E_i,E_i)\right\}d\mathcal{M}, \tag{3}$$

где G — квадратичная форма, соответствующая матрице

$$G_{ij}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}+\delta_{ij}(\Phi-\langle D\Phi,\xi\rangle),$$

δ_{ij} — символ Кронекера, k_i — главные кривизны, а E_i — главные направления поверхности $\mathcal{M}$.

2. Уравнение экстремалей и вторая вариация поверхности вращения

Замечание. Теоремы и следствия, представленные в данном пункте, были опубликованы без доказательств в [6].

Далее будем рассматривать функционал специального вида

$$F(\mathcal{M})=\int\limits_{\mathcal{M}}\phi(\xi_{n+1})d\mathcal{M}, \tag{4}$$

где $d\mathcal{M}$ — элемент площади на C^2-гладкой поверхности $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, заданной радиус-вектором

$$R(t,\theta) = (t, r(t)\rho(\theta)), \tag{5}$$

$\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\rho(\theta)$ — радиус-вектор сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, $t \in (a,b) \subset \mathbb{R}$, $r(t)$ — C^2-гладкая функция на (a,b), ξ_{n+1} — координата единичной нормали к поверхности $\mathcal{M}$.

Обозначим $\tau = \xi_{n+1} = -\dot{r}(t)/\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}$, тогда

$$\begin{aligned} \phi'(\tau) &= d\phi/d\tau, \\ \phi''(\tau) &= d^2\phi/d\tau^2, \\ \dot{r} &= dr(t)/dt, \\ \ddot{r} &= d^2r(t)/dt^2. \end{aligned}$$

Пусть

$$B(t) = \phi''(\tau)/\left((1+\dot{r}^2(t))\left(\phi(\tau)+\phi'(\tau)\dot{r}(t)/\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}\right)\right),$$

тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Поверхность $\mathcal{M}$, заданная радиус-вектором (5), является экстремальной тогда и только тогда, когда*

$$\frac{r(t)\ddot{r}(t)}{1+\dot{r}^2(t)} - \frac{n-1}{B(t)+1} = 0. \tag{6}$$

Экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ устойчива тогда и только тогда, когда функционал

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ \frac{h_t'^2(t,\theta)}{1+\dot{r}^2(t)}(B(t)+1) + \frac{|D_\theta h(t,\theta)|^2}{r^2(t)} - \frac{h^2(t,\theta)}{r^2(t)(1+\dot{r}^2(t))}\frac{(n-1)(n+B(t))}{B(t)+1} \right\} \times$$

$$\times \left(\phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot{r}(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}\right) d\mathcal{M} \tag{7}$$

знакоопределен в классе липшицевых функций $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ таких, что $h \in C_0^1(\mathcal{M})$.

Доказательство. Заметим, что теорема 2 является следствием теоремы 1. Поэтому ее доказательство заключается в том, чтобы записать (2) и (3) с учетом (4) и (5). Для этого нам потребуется выписать выражения главных кривизн и главных направлений поверхности, заданной радиус-вектором (5).

Запишем I и II квадратичные формы поверхности $\mathcal{M}$.

Так как

$$|R_t|^2 = 1+\dot{r}^2(t),\ |R_{\theta_i}|^2 = r^2(t)\dot{\rho}_{\theta_i}\dot{\rho}_{\theta_j},$$

то первая квадратичная форма

$$\mathrm{I} = (1+\dot{r}^2(t))dt^2 + r^2(t)\dot{\rho}_{\theta_i}\dot{\rho}_{\theta_j}d\theta_i d\theta_j = (1+\dot{r}^2(t))dt^2 + r^2(t)d\theta^2,$$

где $d\theta^2 = \dot{\rho}_{\theta_i}\dot{\rho}_{\theta_j}d\theta_i d\theta_j$ — элемент длины для S^{n-1}, $i,j = \overline{1,\ n-1}$.

Вторая квадратичная форма

$$\mathrm{II} = b_{00}\ dt^2 + \sum_{i=1}^{n-1} b_{0i}\ dt\ d\theta_i + \sum_{i<=j} b_{ij} d\theta_i\ d\theta_j,$$

где

$$
\begin{aligned}
b_{00} &= \langle R_{tt},\ \xi\rangle = \langle (0, \ddot r(t)\rho),\ (-\dot r(t)/\sqrt{1+\dot r^2(t)},\ \rho/\sqrt{1+\dot r^2(t)})\rangle = \frac{\ddot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}},\\
b_{0i} &= \langle R_{t\theta_i},\ \xi\rangle = \langle (0, \dot r\dot\rho_{\theta_i}),\ (-\dot r(t)/\sqrt{1+\dot r^2(t)},\ \rho/\sqrt{1+\dot r^2(t)})\rangle = 0,\\
b_{ij} &= \langle R_{\theta_i\theta_j},\ \xi\rangle = \langle (0, r\dot\rho_{\theta_i}\ddot\rho_{\theta_i\theta_j}),\ (-\dot r(t)/\sqrt{1+\dot r^2(t)},\ \rho/\sqrt{1+\dot r^2(t)})\rangle =\\
&= \frac{r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\langle \dot\rho_{\theta_i}\ddot\rho_{\theta_i\theta_j}, \rho\rangle,\\
\xi &= (-\dot r(t)/\sqrt{1+\dot r^2(t)},\ \rho/\sqrt{1+\dot r^2(t)}).
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\mathrm{II} = \frac{\ddot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\ dt^2 + \frac{r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\ d\widetilde{\theta}^2,
$$

где $d\widetilde{\theta}^2$ — вторая квадратичная форма для S^{n-1}.

Применяя формулы из [2], находим главные кривизны

$$
k_1 = \ddot r(t)/(1+\dot r^2(t))^{3/2},\ k_i = -1/r(t)\sqrt{1+\dot r^2(t)},\ i=\overline{2,n},
$$

и главные направления поверхности $\mathcal{M}$

$$
E_1 = R_t/|R_t| = \left(1/\sqrt{1+\dot r^2(t)},\ \dot r(t)\rho/\sqrt{1+\dot r^2(t)}\right),
$$

$$
E_i = R_{\theta_i}/|R_{\theta_i}| = (0,\ \dot\rho_{\theta_i}/|\dot\rho_{\theta_i}|).
$$

Для подстановки в (3) требуется вычислить ∇h в метрике поверхности $\mathcal{M}$. Напомним формулу

$$
(\nabla h)^i = \sum_{j=0}^{n-1} g^{ij}\frac{\partial h}{\partial x_j}, \text{где}\quad i=\overline{0,n-1},
$$

и $\|g_{ij}\|$ — обозначение для матрицы коэффициентов первой квадратичной формы, а $\|g^{ij}\|$ — обратной к ней матрицы.

Далее вычислим координаты градиента функции h

$$
(\nabla h)^0 = \sum_{j=0}^{n-1} g^{0j}\frac{\partial h}{\partial x_j} = g^{00}\frac{\partial h}{\partial x_0} = \frac{h'_t(t,\theta)}{1+\dot r^2(t)},
$$

$$
(\nabla h)^i = \sum_{j=0}^{n-1} g^{ij}\frac{\partial h}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n-1} g^{ij}\frac{\partial h}{\partial x_j} = \frac{1}{r^2}\sum_{j=1}^{n-1}\tilde g^{ij}\frac{\partial h(t,\theta)}{\partial \theta_{ij}} = \frac{1}{r^2}(Dh(t,\theta))^i,\ i\neq 0.
$$

Обозначая вектор с координатами $(Dh(t,\theta))^i$ через $D_\theta h(t,\theta)$, получим координатную запись вектора градиента

$$
\nabla h(t,\theta) = \left(\frac{h'_t(t,\theta)}{1+\dot r^2(t)},\ \frac{D_\theta h(t,\theta)}{r^2(t)}\right).
$$

Отсюда нетрудно видеть, что квадрат модуля градиента будет иметь вид

$$
|\nabla h(t,\theta)|^2 = h'^2_t(t,\theta)/(1+\dot r^2(t)) + |D_\theta h(t,\theta)|^2/r^2(t),
$$

так как $|\nabla h|^2 = \sum\limits_{j=0}^{n-1} g_{ij} \left((\nabla h)^i\right)^2$.

Перейдем к вычислению требуемого скалярного произведения векторов

$$\langle D\phi,\ \xi\rangle = -\frac{\dot r(t)\phi'(\tau)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}$$

и найдем значения матриц $D^2\phi$ и G на векторах E_i и ∇h, координаты которых мы записали выше,

$$D^2\phi(E_1,E_1) = \frac{\phi''(\tau)}{1+\dot r^2(t)},\ D^2\phi(E_i,E_i) = 0,\ i=\overline{2,n},$$

$$G(E_1,E_1) = \frac{\phi''(\tau)}{1+\dot r^2(t)} + \phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}},\ G(E_i,E_i) = \phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}, \tag{8}$$

$$G(\nabla h,\ \nabla h) = \frac{\phi''(\tau){h'_t}^2(t,\theta)}{(1+\dot r^2(t))^2} + \left(\frac{{h'_t}^2(t,\theta)}{1+\dot r^2(t)} + \frac{|D_\theta h(t,\theta)|^2}{r^2(t)}\right)\left(\phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right). \tag{9}$$

Теперь подставим посчитанное в равенство (2) и получим уравнение экстремалей поверхности $\mathcal{M}$, заданной радиус-вектором (5).

Так как все k_i при $i=\overline{2,n}$ равны, и для $G(E_i,E_i)$ ситуация аналогичная, то равенство (2) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} k_i G(E_i,E_i) = k_1 G(E_1,E_1) + (n-1)\sum_{i=2}^{n} k_i G(E_i,E_i) = 0.$$

Таким образом, полученное уравнение экстремалей

$$\frac{\ddot r(t)}{(1+\dot r^2(t))^{3/2}}\left(\frac{\phi''(\tau)}{1+\dot r^2(t)} + \phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right) -$$

$$-\frac{n-1}{r(t)\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\left(\phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right) = 0$$

преобразуем, сократив на $\sqrt{1+\dot r^2(t)}$,

$$\frac{\ddot r(t)}{1+\dot r^2(t)}\left(\frac{\phi''(\tau)}{1+\dot r^2(t)} + \phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right) - \frac{n-1}{r(t)}\left(\phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right) = 0,$$

а затем выразим $\ddot r(t)$

$$\ddot r(t) = \frac{\dfrac{n-1}{r(t)}\left(\phi(\tau) + \dfrac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)(1+\dot r^2(t))}{\dfrac{\phi''(\tau)}{1+\dot r^2(t)} + \phi(\tau) + \dfrac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}}, \tag{10}$$

вынесем в знаменателе за скобки $\phi(\tau)+\phi'(\tau)\dot r(t)/\sqrt{1+\dot r^2(t)}$ и подставим введенное ранее обозначение $B(t)$. Получим

$$\ddot r(t)=\frac{n-1}{r(t)}\frac{1+\dot r^2(t)}{\dfrac{\phi''(\tau)}{(1+\dot r^2(t))\left(\phi(\tau)+\dfrac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)}+1}=\frac{n-1}{B(t)+1}\cdot\frac{1+\dot r^2(t)}{r(t)},$$

что и дает нам заявленное в теореме уравнение экстремалей

$$\frac{r(t)\ddot r(t)}{1+\dot r^2(t)}-\frac{n-1}{B(t)+1}=0.$$

Далее приступим к вычислению второй вариации экстремальной поверхности $\mathcal{M}$, заданной радиус-вектором (5). Подставим посчитанные выражения в (3) и преобразуем полученный интеграл:

$$\int\limits_{\mathcal{M}}\left\{G(\nabla h,\nabla h)-h^2\sum_{i=1}^{n}k_i^2G(E_i,E_i)\right\}d\mathcal{M}=$$

$$=\int\limits_{\mathcal{M}}\left\{\phi''(\tau)\frac{{h'_t}^2(t,\theta)}{(1+\dot r^2(t))^2}+\left(\frac{{h'_t}^2(t,\theta)}{1+\dot r^2(t)}+\frac{|D_\theta h(t,\theta)|^2}{r^2(t)}\right)\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)-\right.$$

$$-h^2(t,\theta)\left(\left(\frac{\ddot r(t)}{(1+\dot r^2(t))^{3/2}}\right)^2\left(\frac{\phi''(\tau)}{1+\dot r^2(t)}+\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\ (n-1)\left(\left(\frac{-1}{r(t)\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)^2\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)\right)\right)\right\}d\mathcal{M}.$$

Возведем в квадрат выражения при h^2 и сгруппируем слагаемые, стоящие при ${h'_t}^2$, получим

$$\int\limits_{\mathcal{M}}\left\{\frac{{h'_t}^2(t,\theta)}{1+\dot r^2(t)}\left(\frac{\phi''(\tau)}{1+\dot r^2(t)}+\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)+\right.$$

$$+\frac{|D_\theta h(t,\theta)|^2}{r^2(t)}\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)-$$

$$-h^2(t,\theta)\left(\frac{\ddot r(t)^2}{(1+\dot r^2(t))^3}\left(\frac{\phi''(\tau)}{1+\dot r^2(t)}+\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\ (n-1)\left(\frac{1}{r^2(t)(1+\dot r^2(t))}\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)\right)\right)\right\}d\mathcal{M}.$$

Теперь подставим в интеграл выражение $\ddot r(t)$ из (10):

$$\int\limits_{\mathcal{M}}\left\{\frac{{h'_t}^2(t,\theta)}{1+\dot r^2(t)}\left(\frac{\phi''(\tau)}{1+\dot r^2(t)}+\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)+\right.$$

$$
+\frac{|D_\theta h(t,\theta)|^2}{r^2(t)}\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)-
$$

$$
-h^2(t,\theta)\left(\left(\frac{\dfrac{n-1}{r(t)}\left(\phi(\tau)+\dfrac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)(1+\dot r^2(t))}{\dfrac{\phi''(\tau)}{1+\dot r^2(t)}+\phi(\tau)+\dfrac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}}\right)^2\times\right.
$$

$$
\times\frac{1}{(1+\dot r^2(t))^3}\left(\frac{\phi''(\tau)}{1+\dot r^2(t)}+\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)+
$$

$$
\left.\left.+(n-1)\left(\frac{1}{r^2(t)(1+\dot r^2(t))}\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)\right)\right)\right\}d\mathcal{M}.
$$

Упростим выражение при h^2

$$
\int\limits_{\mathcal{M}}\left\{\frac{h_t'^2(t,\theta)}{1+\dot r^2(t)}\left(\frac{\phi''(\tau)}{1+\dot r^2(t)}+\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)+\right.
$$

$$
+\frac{|D_\theta h(t,\theta)|^2}{r^2(t)}\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)-
$$

$$
-\frac{h^2(t,\theta)}{r^2(t)(1+\dot r^2(t))}\left(\frac{(n-1)^2\left(\phi(\tau)+\dfrac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)^2}{\dfrac{\phi''(\tau)}{1+\dot r^2(t)}+\phi(\tau)+\dfrac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}}+\right.
$$

$$
\left.\left.+(n-1)\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)\right)\right\}d\mathcal{M}=
$$

$$
=\int\limits_{\mathcal{M}}\left\{\frac{h_t'^2(t,\theta)}{1+\dot r^2(t)}\left(\frac{\phi''(\tau)}{1+\dot r^2(t)}+\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)+\right.
$$

$$
+\frac{|D_\theta h(t,\theta)|^2}{r^2(t)}\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)-h^2(t,\theta)\frac{n-1}{r^2(t)(1+\dot r^2(t))}\times
$$

$$
\left.\times\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)\left(\frac{(n-1)\left(\phi(\tau)+\dfrac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)}{\dfrac{\phi''(\tau)}{1+\dot r^2(t)}+\phi(\tau)+\dfrac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}}+1\right)\right\}d\mathcal{M}.
$$

Вынесем за скобки $\left(\phi(\tau)+\dfrac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)$

$$\int\limits_{\mathcal{M}}\left\{\frac{h_t'^2(t,\theta)}{1+\dot r^2(t)}\left(\frac{\phi''(\tau)}{(1+\dot r^2(t))\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)}+1\right)+\frac{|D_\theta h(t,\theta)|^2}{r^2(t)}-\right.$$

$$\left.-h^2(t,\theta)\frac{n-1}{r^2(t)(1+\dot r^2(t))}\left(\frac{n-1}{\frac{\phi''(\tau)}{(1+\dot r^2(t))\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)}+1}+1\right)\right\}\times$$

$$\times\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)d\mathcal{M}$$

и, учитывая, что

$$\frac{\phi''(\tau)}{(1+\dot r^2(t))\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)}=B(t),$$

получаем выражение для второй вариации функционала (4) в классе экстремальных поверхностей вращения

$$\int\limits_{\mathcal{M}}\left\{\frac{h_t'^2(t,\theta)}{1+\dot r^2(t)}(B(t)+1)+\frac{|D_\theta h(t,\theta)|^2}{r^2(t)}-h^2(t,\theta)\frac{n-1}{r^2(t)(1+\dot r^2(t))}\left(\frac{n-1}{B(t)+1}+1\right)\right\}\times$$

$$\times\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)d\mathcal{M}=\int\limits_{\mathcal{M}}\left\{\frac{h_t'^2(t,\theta)}{1+\dot r^2(t)}(B(t)+1)+\frac{|D_\theta h(t,\theta)|^2}{r^2(t)}-\right.$$

$$\left.-\frac{h^2(t,\theta)}{r^2(t)(1+\dot r^2(t))}\frac{(n-1)(n+B(t))}{B(t)+1}\right\}\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)d\mathcal{M},$$

которое полностью совпадает с (7). Что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Поверхности, заданные радиус-вектором (5), при $\phi(\xi_{n+1})\equiv 1$ являются экстремальными тогда и только тогда, когда выполнено равенство*

$$\frac{\ddot r(t)}{1+\dot r^2(t)}-\frac{n-1}{r(t)}=0,$$

и совпадают с классом минимальных поверхностей [1].

Пусть

$$\alpha(t)=\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)\frac{r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}(B(t)+1),$$

$$\beta_n(t)=\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)\frac{1}{r(t)\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\frac{(n-1)(n+B(t))}{B(t)+1}.$$

Следствие 2. *Экстремальная поверхность $\mathcal{M}$, заданная радиус-вектором (5), является устойчивой тогда и только тогда, когда знакоопределен функционал*

$$\int_a^b\{\alpha(t)h'^2(t)-\beta_n(t)h^2(t)\}\,dt \tag{11}$$

в классе липшицевых функций $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таких, что $h(a)=h(b)=0$.

Доказательство. Проведем доказательство в два этапа. Сначала покажем, как получили функционал (11), а затем проведем непосредственное доказательство устойчивости в обе стороны.

Функционал (7) приводится к заявленному в следствии виду (11) в несколько действий. Выпишем функционал (7)

$$Q=\int\limits_{\mathcal{M}}\left\{\frac{h_t'^2(t,\theta)\,(B(t)+1)}{1+\dot r^2(t)}+\frac{|D_\theta h(t,\theta)|^2}{r^2(t)}-\frac{h^2(t,\theta)}{r^2(t)(1+\dot r^2(t))}\frac{(n-1)(B(t)+n)}{B(t)+1}\right\}\times$$

$$\times\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)d\mathcal{M}.$$

Очевидно, что для него верно неравенство

$$Q\geq\int\limits_{\mathcal{M}}\left\{\frac{h_t'^2(t,\theta)\,(B(t)+1)}{1+\dot r^2(t)}-\frac{h^2(t,\theta)}{r^2(t)(1+\dot r^2(t))}\frac{(n-1)(B(t)+n)}{B(t)+1}\right\}\times$$

$$\times\left(\phi(\tau)+\frac{\phi'(\tau)\dot r(t)}{\sqrt{1+\dot r^2(t)}}\right)d\mathcal{M}.$$

Из выражения I квадратичной формы имеем $d\mathcal{M}=r(t)\sqrt{1+\dot r^2(t)}\,dt\,d\theta$, поэтому

$$Q\geq\int\limits_a^b\left\{\alpha(t)\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}h_t'^2(t,\theta)\,d\theta-\beta_n(t)\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}h^2(t,\theta)\,d\theta\right\}dt.$$

Пусть

$$\left(\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}h^2(t,\theta)\,d\theta\right)^{1/2}=z(t),$$

тогда

$$z^2(t)=\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}h^2(t,\theta)\,d\theta,$$

$$2z'(t)z(t) = 2\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} h(t,\theta){h'}_t(t,\theta)\,d\theta,$$

применяя неравенство Коши — Буняковского, будем иметь

$$z'^2(t) \le \frac{1}{z^2(t)}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} h^2(t,\theta)\,d\theta \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} h'^2_t(t,\theta)\,d\theta \Rightarrow z'^2(t) \le \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} h'^2_t(t,\theta)\,d\theta.$$

Таким образом, получаем

$$Q \ge \int\limits_a^b \Big\{\alpha(t)z'^2(t) - \beta_n(t)z^2(t)\Big\}\,dt.$$

Переходим ко второму этапу доказательства. Если функционал (11) будет знакоопределен для всех $z(t)$, то непосредственно из определения 2 будет следовать устойчивость. Например, если при $\alpha(t) > 0$, то из неравенства $Q \ge \int\limits_a^b \{\alpha(t)z'^2(t) - \beta_n(t)z^2(t)\}dt >$ > 0 следует устойчивость поверхности.

В обратную сторону, если поверхность устойчива, значит вариации поверхности в направлении векторного поля не меняют знака второй вариации, то есть имеем ее знакоопределенность, а следовательно, и функционала (11). Например, если мы полагаем, что $\alpha(t) > 0$, то будет положительная определенность второй вариации функционала, а следовательно, и функционала (11).

Что и требовалось доказать.

Следствие 3. *Экстремальная поверхность, заданная радиус-вектором (5), является устойчивой, если* $\alpha(t)\beta_n(t) \le 0$.

Доказательство. Следствие становится очевидным, если применить к формуле второй вариации поверхности определение 2.

Заметим, что в случае $n = 2$ поверхность $\mathcal{M}$ задается радиус-вектором

$$\vec{r}(t,\theta) = \{t, r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta\}. \tag{12}$$

Следствие 4. *Поверхность* $\mathcal{M}$, *заданная радиус-вектором (12), является экстремальной тогда и только тогда, когда выполнено одно из уравнений*

$$\frac{r(t)\ddot{r}(t)}{1+\dot{r}^2(t)} - \frac{1}{B(t)+1} = 0$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\left(\phi'(\tau)\frac{\dot{r}(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}} + \phi(\tau)\right)\frac{r(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}\right) = 0.$$

Доказательство. Легко видеть, что первое из уравнений экстремалей получается при подстановке в (6) $n = 2$. Второе проверяется непосредственным дифференцированием.

Пример 1. При $\phi(\xi_{n+1}) = \sqrt{2\xi_{n+1}^2 - 1}$ для функционала (4) класс экстремальных поверхностей соответствует классу максимальных поверхностей в пространстве-времени Минковского $\mathbb{R}_1^{n+1}$, которые устойчивы и глобально максимизируют площадь в $\mathbb{R}_1^{n+1}$ (см. [4]). Вычисление уравнения экстремалей и доказательство глобальной устойчивости для случая $n = 2$ было проведено автором в [5].

3. Признак устойчивости и неустойчивости

Пусть $\sup\limits_{t\in(a,b)} \alpha(t)\beta_n(t) = \nu^2 < +\infty$, тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ задана радиус-вектором (5). Для положительных функций $\alpha(t)$, $\beta_n(t)$ поверхность $\mathcal{M}$ является устойчивой, если*

$$\int\limits_a^b \frac{dt}{\alpha(t)} \leqslant \pi\nu,$$

и неустойчивой, если

$$\int\limits_a^b \beta_n(t)dt > \pi\nu.$$

Замечание. Теорема 3 была для случая $n = 2$ доказана автором в статье [5], а в данной формулировке опубликована без доказательств в [6].

Доказательство. Рассуждая также, как в доказательстве следствия 2, замечаем, что квадратичную форму (7) можно оценить снизу некоторым функционалом, то есть

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ \frac{h_t'^2(t)}{1+\dot{r}^2(t)}\,(B(t)+1) - \frac{h^2(t)}{r^2(t)(1+\dot{r}^2(t))}\frac{(n-1)(n+B(t))}{B(t)+1} \right\} \times$$

$$\times \left(\phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot{r}(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}} \right) d\mathcal{M} \geq \omega_{n-1} \int\limits_a^b \left(z_t'^2(t)\alpha(t) - z^2(t)\beta_n(t) \right) dt,$$

где ω_{n-1} — площадь $(n-1)$-мерной сферы и

$$\alpha(t) = \left(\phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot{r}(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}} \right) \frac{r(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}(B(t)+1),$$

$$\beta_n(t) = \left(\phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot{r}(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}} \right) \frac{1}{r(t)\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}\frac{(n-1)(n+B(t))}{B(t)+1}.$$

Из условия на функции $\sup\limits_{t\in(a,b)} \alpha(t)\beta_n(t) = \nu^2$ следует, что $\alpha(t)\beta_n(t) \leqslant \nu^2$. Тогда справедливо неравенство

$$\int\limits_a^b \left\{ \alpha(t)z'^2(t) - \beta_n(t)z^2(t) \right\} dt \geqslant \int\limits_a^b \left\{ \alpha(t)z'^2(t) - \frac{\nu^2 z^2(t)}{\alpha(t)} \right\} dt.$$

Заметим, что для устойчивости экстремальной поверхности вращения достаточно

$$\int\limits_a^b \left\{ \alpha(t)z'^2(t) - \frac{\nu^2 z^2(t)}{\alpha(t)} \right\} dt \geqslant 0,$$

или, что то же самое,

$$\frac{\int\limits_a^b \alpha(t) z'^2(t)\, dt}{\int\limits_a^b \frac{\nu^2 z^2(t)}{\alpha(t)}\, dt} \geqslant 1. \tag{13}$$

Сделаем замену в интегралах и рассмотрим их отношение.

Пусть

$$y(t) = \int\limits_0^t du/\alpha(u),\ t \in [0, b-a],$$

тогда $dy = dt/\alpha(t)$ и $z'_t = z'_y y'_t = z'_y/\alpha(t)$, и отношение (13) принимает вид

$$\frac{\int\limits_a^b \alpha(t) z'^2(t)\, dt}{\int\limits_a^b \frac{\nu^2 z^2(t)}{\alpha(t)}\, dt} = \frac{1}{\nu^2} \frac{\int\limits_{y(a)}^{y(b)} z'^2_y(y)\, dy}{\int\limits_{y(a)}^{y(b)} z^2(y)\, dy}. \tag{14}$$

Применяя к (14) неравенство Виртингера [9, § 7.7], получим

$$\frac{\int\limits_{y(a)}^{y(b)} z'^2_y(y) dy}{\int\limits_{y(a)}^{y(b)} z^2(y) dy} \geqslant \left(\frac{\pi}{\int\limits_a^b dt/\alpha(t)} \right)^{-2}. \tag{15}$$

Далее, сопоставляя (13) и (15), будем иметь неравенство для устойчивости поверхности вращения:

$$\frac{\int\limits_a^b \alpha(t) z'^2(t)\, dt}{\int\limits_a^b \frac{\nu^2 z^2(t)}{\alpha(t)}\, dt} = \frac{1}{\nu^2} \frac{\int\limits_{y(a)}^{y(b)} z'^2_y(y)\, dy}{\int\limits_{y(a)}^{y(b)} z^2(y)\, dy} \geqslant \frac{1}{\nu^2} \left(\frac{\pi}{\int\limits_a^b dt/\alpha(t)} \right)^{-2} \geqslant 1,$$

$$\int\limits_a^b dt/\alpha(t) \leq \pi\nu.$$

Так как для доказательства неустойчивости достаточно предъявить хотя бы одну функцию h, для которой нарушается знакоопределенность второй вариации, то допустим, что в функционале (7) функция $h(t,\theta) = h(t)$, тогда он принимает вид

$$\omega_{n-1} \int\limits_a^b \Big(h_t'^2(t)\alpha(t) - h^2(t)\beta_n(t) \Big)\, dt.$$

Так как $\alpha(t)\beta_n(t) \leqslant \nu^2$, то справедливо неравенство

$$\int\limits_a^b \Big\{ \alpha(t) h'^2(t) - \beta_n(t) h^2(t) \Big\}\, dt \leqslant \int\limits_a^b \left\{ \frac{\nu^2 h'^2(t)}{\beta_n(t)} - \beta_n(t) h^2(t) \right\} dt.$$

Таким образом, чтобы экстремальная поверхность вращения была неустойчивой, достаточно, чтобы существовала функция $h \in C_0^1(a,b)$ такая, что

$$\int\limits_a^b \left\{ \frac{\nu^2 h'^2(t)}{\beta_n(t)} - \beta_n(t) h^2(t) \right\} dt \leqslant 0$$

или

$$\frac{\int_a^b \frac{\nu^2 h'^2(t)}{\beta_n(t)}\, dt}{\int_a^b \beta_n(t) h^2(t)\, dt} \leqslant 1. \tag{16}$$

Рассмотрим функцию h, заданную равенством

$$h(u) = \sin\left(\pi \frac{\int_a^u \beta_n(t)\, dt}{\int_a^b \beta_n(t)\, dt} \right).$$

Тогда

$$\nu^2 \frac{\int\limits_a^b \frac{h'^2(t)}{\beta_n(t)}\, dt}{\int\limits_a^b \beta_n(t) h^2(t)\, dt} = \nu^2 \left(\frac{\pi}{\int_a^b \beta_n(t)\, dt} \right)^2 \cdot \frac{\int\limits_a^b \beta_n(t) \cos^2\left(\pi \frac{\int_a^t \beta_n(u)\, du}{\int_a^b \beta_n(t)\, dt} \right) dt}{\int\limits_a^b \beta_n(t) \sin^2\left(\pi \frac{\int_a^t \beta_n(u)\, du}{\int_a^b \beta_n(t)\, dt} \right) dt} =$$

$$= \nu^2 \left(\frac{\pi}{\int_a^b \beta_n(t)\, dt} \right)^2 \cdot \frac{\int\limits_a^b \beta_n(t) \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{\int_a^t \beta_n(u)\, du}{\int_a^b \beta_n(t)\, dt} \right) \right) dt}{\int\limits_a^b \beta_n(t) \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{\int_a^t \beta_n(u)\, du}{\int_a^b \beta_n(t)\, dt} \right) \right) dt} = \nu^2 \left(\frac{\pi}{\int_a^b \beta_n(t)\, dt} \right)^2,$$

так как, интегрируя по частям, получим, что

$$\int_a^b \beta_n(t)\cos\left(2\pi\frac{\int_a^t \beta_n(u)\,du}{\int_a^b \beta_n(t)\,dt}\right)dt = 0.$$

Следовательно, при выполнении условия

$$\int_a^b \beta_n(t)dt > \pi\nu$$

выполнено (16), что означает, что поверхность будет неустойчива.

Теорема 3 доказана.

Для иллюстрации полученных в теореме 3 результатов приведем следующий пример.

Пример 2. В работе [5] было установлено для случая $n = 2$, что экстремалями функционала (4) с функцией

$$\phi(\tau) = \tau(t)\left(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}\int_{\tau(t_0)}^{\tau(t)} \frac{(1-\tau^2(t))^{(p-2)/2}}{\tau^2(t)}d\tau\right),$$

где $\tau = \xi_3$, $\mathcal{C} = (\phi'(\tau(t_0))\tau(t_0) - \phi(\tau(t_0)))(1-\tau^2(t_0))^{(2-p)/2}$, $\mathcal{C}_1 = \phi(\tau(t_0))/\tau(t_0)$, являются p-минимальные поверхности, класс которых был впервые указан В.М. Миклюковым и исследовался в работе В.Г. Ткачева [11].

Такие поверхности характеризуются тем, что функция $x_3 = f(x_1,\ x_2)$ в метрике поверхности $\mathcal{M}$ является p-гармонической, то есть удовлетворяет дифференциальному уравнению $\mathrm{div}(|\nabla f|^{p-2}\nabla f) = 0$ в метрике p-минимальной поверхности $\mathcal{M}$.

На основании теоремы 3 можно заключить, что p-минимальная поверхность вращения устойчива на интервале (t_0, t), определяемом из неравенства

$$t - t_0 \leqslant \pi\frac{(p-1)\sqrt{p}}{r_0 C_0^{p-1}},\ C_0 = \frac{\dot r^2(t_0)+1}{r^{2/(p-1)}(t_0)},\ \inf_{t\in(a,b)} r(t) = r_0,$$

и неустойчива на интервале, который находится из неравенства

$$\int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{dr}{r^2(t)\sqrt{\mathcal{C}_0 r^{\frac{2}{p-1}}(t) - 1}} > \pi\frac{p-1}{r_0\sqrt{p}}.$$

Подробные вычисления приведенных неравенств можно найти в работе [5].

Примечания

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 11-01-97021-р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веденяпин, А. Д. Внешние размеры трубчатых минимальных гиперповерхностей / А. Д. Веденяпин, В. М. Миклюков // Мат. сб. — 1986. — Т. 131. — С. 240–250.

2. Дубровин, Б. А. Современная геометрия: Методы и приложения / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 760 с.
3. Клячин, В. А. Об устойчивости экстремальных поверхностей некоторых функционалов типа площади / В. А. Клячин, Н. М. Медведева // Сибирские электронные математические известия. Статьи. — 2007. — Т. 4. — С. 113–132.
4. Клячин, В. А. Признаки неустойчивости поверхностей нулевой средней кривизны в искривленных лоренцевых произведениях / В. А. Клячин, В. М. Миклюков // Мат. сб. — 1996. — Т. 187, № 11. — С. 67–88.
5. Медведева, Н. М. Исследование устойчивости экстремальных поверхностей вращения / Н. М. Медведева // Изв. Сарат. ун-та. Серия: «Математика. Механика. Информатика». — Вып. 2. — 2007. — Т. 7. — С. 25–32.
6. Полубоярова, Н. М. Исследование устойчивости n-мерных экстремальных поверхностей вращения / Н. М. Полубоярова // Изв. вузов. Математика. — 2011. — № 2. — С. 106–109.
7. Тужилин, А. А. Об индексе минимальных поверхностей / А. А. Тужилин // Труды Математического института РАН. — 1992. — Т. 193. — С. 183–188.
8. Тужилин, А. А. Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей / А. А. Тужилин, А. Т. Фоменко. — М. : Наука, 1991. — 174 с.
9. Харди, Г. Г. Неравенства / Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. — М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. — 250 с.
10. Simons, J. Minimal varieties in riemannian manifolds / J. Simons // Ann. of Math. — 1968. — V. 88, № 1. — P. 62–105.
11. Tkachev, V. G. External geometry of p-minimal surfaces / V. G. Tkachev // Geometry from the Pacific Rim. Eds.: Berrick/Loo/Wang, Walter de Gruyter&Co. — Berlin, 1997. — P. 363–375.

FEATURES OF STABLE AND INSTABLE EXTREMAL SURFACE OF ROTATION

N.M. Poluboyarova

In this paper we consider the extremal surfaces of rotation of the area type functional, for which we obtain the first and second variations. We proof the feature of stability and instability for n-dimension rotation surfaces with help of the definition and in the terms special integrals.

Key words: *area type functional, functional variation, extremal surface, stable (instable) extremal surface, p-minimal surface.*