УДК 514.772.2+517.97
ББК 22.151

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ *G*-ЕМКОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НИХ [1]

Н.М. Полубоярова

В статье рассматриваются G-емкости конденсаторов, построенных на экстремальных поверхностях для функционалов типа площади. На основе полученных оценок этих емкостей доказаны признаки устойчивости и неустойчивости экстремальных поверхностей.

Ключевые слова: *функционал типа площади, вариация функционала, экстремальная поверхность, устойчивая (неустойчивая) экстремальная поверхность, G-емкость конденсатора.*

Введение

В процессе развития теории капиллярных поверхностей появились функционалы с нелинейной функцией, зависящей от единичной нормали к поверхности, которые отличаются от функционалов объема, и потребовали дополнительного исследования для получения признаков устойчивости и неустойчивости. В частности, в монографии Р. Финна [14] рассматриваются вопросы устойчивости капиллярных поверхностей, а в работе В.А. Саранина [12] изучается устойчивость так называемых магнитных жидкостей, которые приводят к рассмотрению функционалов вида

$$F(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \Phi(x,\xi)\, d\mathcal{M},$$

где $\Phi: \ \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} - C^2$ — гладкая функция, в качестве потенциальной энергии соответствующей физической системы.

Подобные вопросы также тесно связаны и с физическими задачами о равновесии различных систем и описании их устойчивых и неустойчивых состояний. В большинстве случаев решение сводится к исследованию положительной определенности второй вариации специального функционала, связанного с потенциальной энергией системы. Примерами такого функционала будут функционалы, являющиеся линейной комбинацией функционала площади и функционала объема, что приводит к исследованию поверхностей постоянной средней кривизны, которые моделируют, например, равновесные состояния двух жидких сред.

В настоящее время достаточно полно подобные исследования проведены для одномерных функционалов и для функционала площади. Имеется широкий спектр работ, посвященных задаче об устойчивости минимальных поверхностей в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах, в частности, А.А. Тужилина, Ю.А. Аминова, А.Т. Фоменко, В.М. Миклюкова, В.А. Клячина, В.Г. Ткачева, А.В. Погорелова, М. до Кармо, Ч.К. Пенга, Ш. Яу, Р. Финна, Дж. Саймонса и др.

Для решения некоторых задач теории минимальных поверхностей были применены модульно-емкостные методы. Эти методы заимствованы из теории квазиконформных отображений и модифицированы В.М. Миклюковым [7] применительно к исследованиям минимальных поверхностей. Позже, в работах В.М. Миклюкова и его учеников, модульно-емкостная техника дала эффективные результаты для изучения минимальных трубок и лент в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах (например, [9; 10]), для определения конформного типа поверхности (например, [5; 8]), а также для исследования устойчивости поверхностей нулевой средней кривизны (и, в частности, трубок и лент) в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах (например, [2; 4]). В данной работе эти методы применяются для исследования устойчивости экстремальных поверхностей.

Постановка задачи. Пусть M — n-мерное связное ориентируемое многообразие класса C^2 без края. Рассмотрим гиперповерхность $\mathcal{M} = (M, u)$ без края, полученную C^2-вложением $u : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, и C^2-гладкую функцию $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\Phi(-\xi) = \Phi(\xi)$. Если обозначить через ξ поле единичных нормалей к поверхности $\mathcal{M}$, то для любой C^2-гладкой поверхности $\mathcal{M}$ определена величина

$$F(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \Phi(\xi)\, d\mathcal{M}, \tag{1}$$

которая не зависит от выбора нормали ξ. Функционал (1) будем называть **функционалом типа площади**.

Основным объектом данного исследования будут поверхности, являющиеся экстремалями функционала (1). Заметим, что при $\Phi(\xi) \equiv 1$ экстремали функционала — минимальные поверхности.

Цель работы: получение признаков устойчивости и неустойчивости экстремальных поверхностей $\mathcal{M}$.

1. Основные понятия

Пусть V — C^2-гладкое векторное поле, определенное в окрестности поверхности $\mathcal{M}$, такое, что $V|_{\mathcal{M}} = h{\cdot}\xi$, где $h \in C_0^1(\mathcal{M})$, ξ — поле единичных нормалей к поверхности, при этом предполагается, что интегральные кривые поля V лежат на прямых линиях и вдоль них выполнено $|V| = \mathrm{const}$.

Ясно, что если поверхность $\mathcal{M}$ вложена, то любое векторное поле $V = h{\cdot}\xi$, заданное вдоль $\mathcal{M}$, можно продолжить в некоторую окрестность $\mathcal{M}$ так, что будут выполнены сформулированные выше условия. Заметим, что согласно работе [15] вторая вариация не зависит от выбора продолжений.

Пусть $U(\mathcal{M})$ — окрестность поверхности $\mathcal{M}$, в которой определено поле V и однопараметрическая группа локальных диффеоморфизмов $g_t(x) : U(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}^{n+1}$, порожденная векторным полем V. То есть $g_t(x)$ — решение задачи Коши:

$$\frac{dg_t(x)}{dt} = V(g_t(x)), \;\; g_t(x)|_{t=0} = x.$$

Положим $\mathcal{M}_t = g_t(\mathcal{M})$. Ясно, что $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$.

Определение 1. *Поверхность $\mathcal{M}$ является стационарной, если первая вариация функционала (1) равна нулю, то есть*

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\mathcal{M}_t} \Phi(\xi)\, d\mathcal{M}_t \Bigg|_{t=0} = 0.$$

Определение 2. *Стационарная поверхность $\mathcal{M}$ будет устойчива, если вторая вариация функционала (1)*

$$\frac{d^2}{dt^2} \int\limits_{\mathcal{M}_t} \Phi(\xi)\, d\mathcal{M}_t \Bigg|_{t=0}$$

знакоопределена при всех бесконечно малых деформациях $\mathcal{M}_t$ поверхности $\mathcal{M}$, иначе поверхность $\mathcal{M}$ — неустойчива.

Замечание. В случае когда вторая вариация стационарной поверхности локально знакоопределена, то есть вариации с малым носителем дают одинаковый знак, будем называть поверхность *экстремальной*. Далее будут рассматриваться только экстремальные поверхности.

Обозначим G — квадратичную форму, соответствующую матрице

$$G_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \delta_{ij}(\Phi - \langle D\Phi, \xi \rangle),$$

δ_{ij} — символ Кронекера, k_i — главные кривизны, а E_i — главные направления поверхности $\mathcal{M}$.

В работе [3] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Поверхность $\mathcal{M}$ класса C^2 является экстремалью функционала (1) тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=1}^{n} k_i G(E_i, E_i) = 0.$$

Экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ устойчива, если для любой функции $h(x) \in C_0^1(\mathcal{M})$ знакоопределена квадратичная форма

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ G(\nabla h, \nabla h) - h^2 \sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) \right\} d\mathcal{M}, \qquad (2)$$

иначе поверхность $\mathcal{M}$ неустойчива.

2. Оценка *G*-емкости, проективный объем и неустойчивость экстремальной поверхности

Общеизвестен тот факт, что гауссово отображение двумерных минимальных поверхностей в единичную сферу является одновременно гармоническим и конформным.

В многомерном случае это уже не так. Поэтому в [16] был найден другой подход к изучению полных многомерных минимальных подмногообразий евклидова пространства произвольной коразмерности. Суть данного метода сводится к введению некоторой меры некомпактности (проективного объема) минимальных подмногообразий евклидова пространства. В работе [13] этот метод применен к задачам исследования внешней геометрии многомерных минимальных поверхностей.

В настоящей работе описанный подход был использован для получения признака неустойчивости экстремальных поверхностей.

Поверхность $\mathcal{M}$ (без края) называется **внутренне полной**, если любой расходящийся путь на M имеет бесконечную длину.

Поверхность $\mathcal{M}$ называется **внешне полной**, или собственно погруженной, если для любой последовательности точек $\{m_i\} \subset M$, не имеющей накопления в M, последовательность образов $x(m_i)$ не имеет точек накопления в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\Omega \subset \mathcal{M}$ — произвольная область на поверхности $\mathcal{M}$ и $P, Q \subset \Omega$ — два непересекающихся замкнутых множества в $\overline{\Omega}$. Всякую такую тройку $(P, Q; \Omega)$ назовем **конденсатором** на поверхности $\mathcal{M}$.

***G*-емкостью конденсатора** $(P, Q; \Omega)$ (см. [4]) назовем величину

$$\operatorname{cap}_G(P, Q; \Omega) = \inf_{\varphi} \int\limits_{\mathcal{M}} G(\nabla\varphi, \nabla\varphi)\, d\mathcal{M},$$

где точная нижняя грань берется по всем локально-липшицевым функциям $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^1$ таким, что $\varphi(m) = 1$ при $m \in P$ и $\varphi(m) = 0$ при $m \in Q$.

Рассмотрим на поверхности $\mathcal{M}$, являющейся экстремалью функционала типа площади (1), два замкнутых непересекающихся множества (см. рис. 1): P — часть поверхности, содержащаяся внутри шара $O_1(O, r)$, и Q — часть поверхности, лежащая вне шара $O_2(O, R)$, то есть $Q = \mathcal{M} \setminus O_2(O, R)$, где $0 < r < R < \infty$, на которых функция $h(u)$ такая, что $h|_P = 1$ и $h|_Q = 0$.

Несобственный интеграл

$$Q_n(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \frac{d\mathcal{M}}{|x|^n} \tag{3}$$

называется **проективным объемом** поверхности $\mathcal{M}$.

Обозначим

$$||A||_G^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i),$$

$\Lambda(\xi)$ — максимальное по модулю собственное значение матрицы G, и

$$V_{\mathcal{M}} = \int\limits_{\mathcal{M}(r,R)} d\mathcal{M} \; - \tag{4}$$

объем части поверхности $\mathcal{M}$.

Теорема 2. *Внешне полная экстремальная поверхность $\mathcal{M}(r, R)$, имеющая конечный проективный объем, будет неустойчива, если выполнено неравенство*

$$\int\limits_{\mathcal{M}(r,R)} ||A||_G^2\, d\mathcal{M} > \frac{\Lambda(\xi)}{(\ln \frac{R}{r})^2} Q_n^{2/n} V_{\mathcal{M}}^{(n-2)/n}.$$

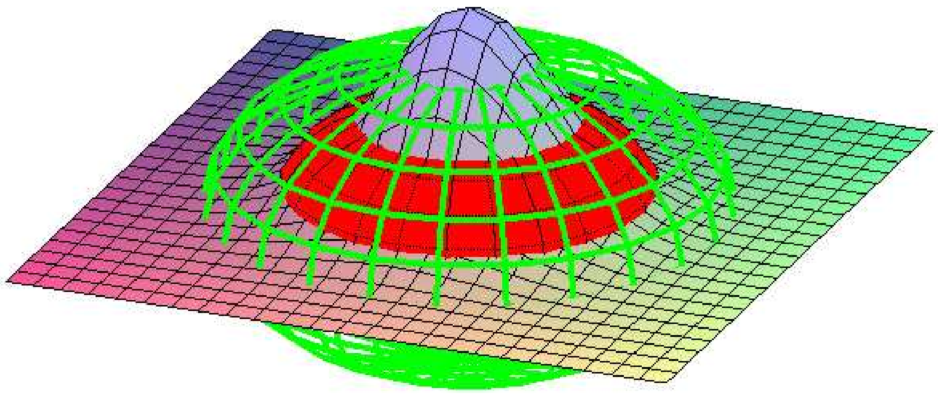

Рис. 1. Конденсатор на произвольной поверхности

Рассмотрим вариационную задачу

$$\int\limits_{\mathcal{M}(r,R)} G\left(\nabla h, \nabla h\right)\, d\mathcal{M} \to \inf\,. \tag{5}$$

Известно [1, гл. 3, § 4, п. 4.1, свойство 3], что эта задача имеет решение $h_0(x) \in C_0^1(\Omega)$, такое что

$$\operatorname{cap}_G\left(P,\, \partial\Omega;\, \Omega\right) = \int\limits_{\mathcal{M}(r,R)} G(\nabla h_0, \nabla h_0)\, d\mathcal{M}.$$

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется теорема, доказанная в работе [3].

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{M}$ — экстремальная поверхность для функционала (1) со знакоопределенной матрицей G. Если найдется область $\Omega \subset \mathcal{M}$ и компакт $P \Subset \Omega$ такие, что*

$$\int\limits_{P} ||A||_G^2\, d\mathcal{M} > \operatorname{cap}_G(P, \partial\Omega; \Omega),$$

то $\mathcal{M}$ — неустойчива.

Доказательство. Определим допустимую в вариационной задаче (5) функцию

$$\varphi(|x|) = \frac{\ln\dfrac{|x|}{r}}{\ln\dfrac{R}{r}}.$$

Тогда, применяя (2), будем иметь неравенство

$$\operatorname{cap}_G(P, Q; \Omega) \leq \int\limits_{\mathcal{M}(r,R)} G(\nabla\varphi, \nabla\varphi)\, d\mathcal{M},$$

которое с помощью неравенства Гельдера можно переписать в виде

$$\int\limits_{\mathcal{M}(r,R)} G(\nabla\varphi,\nabla\varphi)\,d\mathcal{M} \le$$

$$\le \left(\int\limits_{\mathcal{M}(r,R)} G^{n/2}(\nabla\varphi,\nabla\varphi)\,d\mathcal{M}\right)^{2/n} \left(\int\limits_{\mathcal{M}(r,R)} d\mathcal{M}\right)^{(n-2)/n}.$$

Заметим, что в метрике поверхности выполнены следующие равенства:

$$\nabla|x| = \nabla\left(\sum x_i^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\sum x_i^2\right)^{-1/2}\nabla\left(\sum x_i^2\right) = \frac{1}{2|x|}2x^T = \frac{x^T}{|x|},$$

$$|\nabla|x|| = \frac{|x^T|}{|x|},$$

$$\nabla\left(\ln\frac{|x|}{r}\right) = \frac{r}{|x|}\nabla\left(\frac{|x|}{r}\right) = \frac{1}{|x|}\nabla|x| = \frac{1}{|x|}\frac{x^T}{|x|} = \frac{x^T}{|x|^2}.$$

Подставляя их в выражение $G(\nabla\varphi,\nabla\varphi)$, будем иметь

$$G(\nabla\varphi,\nabla\varphi) = \frac{1}{(\ln\frac{R}{r})^2}\left(D^2\Phi\left(\frac{x^T}{|x|^2},\frac{x^T}{|x|^2}\right) + (\Phi - \langle D\Phi,\xi\rangle)\frac{|x^T|^2}{|x|^4}\right) =$$

$$= \frac{1}{(\ln\frac{R}{r})^2}\left(D^2\Phi(\tau,\tau) + (\Phi - \langle D\Phi,\xi\rangle)|\tau|^2\right)\frac{|x^T|^2}{|x|^4} =$$

$$= \frac{1}{(\ln\frac{R}{r})^2}\left(D^2\Phi(\tau,\tau) + (\Phi - \langle D\Phi,\xi\rangle)\right)\frac{|x^T|^2}{|x|^4} = \frac{1}{(\ln\frac{R}{r})^2}\frac{|x^T|^2}{|x|^4}G(\tau,\tau) \le$$

$$\le \frac{\Lambda(\xi)}{(\ln\frac{R}{r})^2}\frac{|x^T|^2}{|x|^4} \le \frac{\Lambda(\xi)}{(\ln\frac{R}{r})^2}\frac{1}{|x|^2},$$

где $\tau = \frac{x^T}{|x|^2}$ и использованы неравенства $|x^T|/|x| \le 1$, $G(\tau,\tau) \le \Lambda(\xi)$.

Таким образом, получаем оценку емкости

$$\mathrm{cap}_G(P,Q;\Omega) \le \left(\int\limits_{\mathcal{M}(r,R)} \left(\frac{G(\tau,\tau)}{(\ln\frac{R}{r})^2}\frac{|x^T|^2}{|x|^4}\right)^{n/2} d\mathcal{M}\right)^{2/n} \left(\int\limits_{\mathcal{M}(r,R)} d\mathcal{M}\right)^{(n-2)/n} \le$$

$$\le \frac{\Lambda(\xi)}{(\ln\frac{R}{r})^2}\left(\int\limits_{\mathcal{M}(r,R)} \left(\frac{|x^T|^2}{|x|^4}\right)^{n/2} d\mathcal{M}\right)^{2/n} \left(\int\limits_{\mathcal{M}(r,R)} d\mathcal{M}\right)^{(n-2)/n} \le$$

$$\le \frac{\Lambda(\xi)}{(\ln\frac{R}{r})^2}\left(\int\limits_{\mathcal{M}(r,R)} \frac{1}{|x|^n}\,d\mathcal{M}\right)^{2/n} \left(\int\limits_{\mathcal{M}(r,R)} d\mathcal{M}\right)^{(n-2)/n}.$$

С учетом введенных обозначений (3) и (4) G-емкость может быть оценена следующим выражением

$$\mathrm{cap}_{\mathrm{G}}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}; \Omega) \leq \frac{\Lambda(\xi)}{(\ln \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{r}})^2} \mathrm{Q}_{\mathcal{M}}^{2/\mathrm{n}} \mathrm{V}_{\mathcal{M}}^{(\mathrm{n}-2)/\mathrm{n}}.$$

Далее, применяя теорему 3, получаем требуемое.

3. Уравнение экстремалей и вторая вариация поверхности вращения

Далее будем рассматривать функционал специального вида

$$F(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \phi(\xi_{n+1}) d\mathcal{M}, \tag{6}$$

где $d\mathcal{M}$ — элемент площади на C^2-гладкой поверхности $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, заданной радиус-вектором

$$R(t, \theta) = (t, r(t)\rho(\theta)), \tag{7}$$

$\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\rho(\theta)$ — радиус-вектор сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, $r(t)$ — C^2-гладкая функция на (a, b), ξ_{n+1} — координата единичной нормали к поверхности $\mathcal{M}$.

Обозначим $\tau = \xi_{n+1} = -\dot{r}(t)/\sqrt{1 + \dot{r}^2(t)}$, тогда

$$\begin{array}{rcl} \phi'(\tau) & = & d\phi/d\tau, \\ \phi''(\tau) & = & d^2\phi/d\tau^2, \\ \dot{r} & = & dr(t)/dt, \\ \ddot{r} & = & d^2 r(t)/dt^2. \end{array}$$

Пусть

$$B(t) = \phi''(\tau) / \left((1 + \dot{r}^2(t)) \left(\phi(\tau) + \phi'(\tau)\dot{r}(t)/\sqrt{1 + \dot{r}^2(t)} \right) \right),$$

тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Поверхность $\mathcal{M}$, заданная радиус-вектором (7), является экстремальной тогда и только тогда, когда*

$$\frac{r(t)\ddot{r}(t)}{1 + \dot{r}^2(t)} - \frac{n-1}{B(t)+1} = 0.$$

Экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ устойчива тогда и только тогда, когда функционал

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ \frac{h_t'^2(t,\theta)}{1 + \dot{r}^2(t)} (B(t)+1) + \frac{|D_\theta h(t,\theta)|^2}{r^2(t)} - \frac{h^2(t,\theta)}{r^2(t)(1 + \dot{r}^2(t))} \frac{(n-1)(n + B(t))}{B(t)+1} \right\} \times$$

$$\times \left(\phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot{r}(t)}{\sqrt{1 + \dot{r}^2(t)}} \right) d\mathcal{M}$$

знакоопределен в классе функций $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, таких, что $h \in C_0^1(\mathcal{M})$.

Пусть

$$\alpha(t) = \left(\phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot{r}(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}\right) \frac{r(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}(B(t)+1),$$

$$\beta_n(t) = \left(\phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot{r}(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}\right) \frac{1}{r(t)\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}} \frac{(n-1)(n+B(t))}{B(t)+1}.$$

Следствие 1. *Экстремальная поверхность $\mathcal{M}$, заданная радиус-вектором (7), является устойчивой тогда и только тогда, когда знакоопределен функционал*

$$\int_a^b \{\alpha(t)h'^2(t) - \beta_n(t)h^2(t)\}\, dt$$

в классе липшицевых функций $h(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, таких что $h(a) = h(b) = 0$.

Замечание. Теорема 4 и ее следствие 1 были опубликованы в [11].

4. Вычисление *G*-емкости и ее применение для исследования поверхности вращения

Рассмотрим на поверхности $\mathcal{M}$, заданной радиус-вектором (7) и являющейся экстремалью функционала типа площади (6), два замкнутых, непересекающихся множества (см. рис. 2): $P = \{x \in \mathcal{M} : x_{n+1} \le t_1\}$ и $Q = \{x \in \mathcal{M} : x_{n+1} \ge t_2\}$, где $-\infty \le a \le t_1 < t_2 \le b \le +\infty$, на которых функция $h(t)$ такая, что $h|_P = 0$ и $h|_Q = 1$.

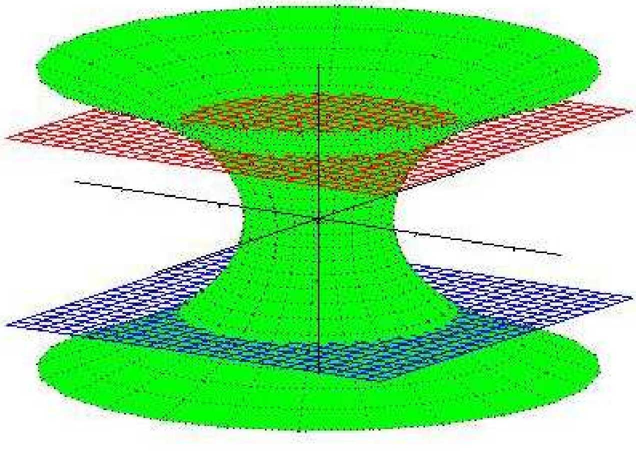

Рис. 2. Конденсатор на поверхности вращения

Пусть $\alpha(t) > 0$.

Тогда G — емкость описанного выше конденсатора вычисляется по формуле

$$\mathrm{cap}_G(P, \partial\Omega; \Omega) = \frac{\omega_{n-1}}{\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\alpha(t)}},$$

которая будет выведена в ходе доказательства следующей теоремы.

Поверхность $\mathcal{M}$ назовем *G-параболической* (см. [4]), если найдется такая последовательность подобластей $\Omega_k \subset \mathcal{M}$, $\Omega_k \Subset \Omega_{k+1}$, $\bigcup\limits_{k\geq 1} \Omega_k = \mathcal{M}$, что выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{cap}_G(P, \partial\Omega_k; \Omega_k) = 0$$

для любого $P \Subset \mathcal{M}$.

Теорема 5. *Экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ является G-параболической, если для некоторого $t_0 \in (a,b)$*

$$\int\limits_a^{t_0} \frac{dt}{\alpha(t)} = \infty$$

и

$$\int\limits_{t_0}^{b} \frac{dt}{\alpha(t)} = \infty,$$

причем устойчивой при $\beta_n(t) \leq 0$ и неустойчивой при $\beta_n(t) > 0$ для всех $t \in (a,b)$.

Доказательство. Из построения конденсатора имеем, что для любой допустимой в вариационной задаче (5) функции $h(t,\theta) = h(t)$ (такое допустимо согласно следствию 1) справедливо соотношение

$$1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial h(t)}{\partial t}\, dt.$$

В силу интегральной формы неравенства Коши — Буняковского, будет верно неравенство

$$\left(\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{\alpha(t)}}{\sqrt{\alpha(t)}} \frac{\partial h(t)}{\partial t}\, dt\right)^2 \leq \int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha(t) h_t^2(t)\, dt \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\alpha(t)}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha h_t^2(t)\, dt \geq \frac{1}{\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\alpha(t)}}.$$

Интегрируя правую и левую часть неравенства по сфере $\mathbb{S}^{n-1}$, находим

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha h_t^2(t)\, dt\, d\theta \geq \frac{\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} d\theta}{\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\alpha(t)}} = \frac{\omega_{n-1}}{\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\alpha(t)}},$$

что с учетом принятых обозначений равносильно неравенству

$$\int\limits_{\mathcal{M}} G(\nabla h, \nabla h)\, d\mathcal{M} = \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha(t) h_t^2(t)\, dt\ d\theta \geq \frac{\omega_{n-1}}{\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\alpha(t)}}.$$

Переходя здесь к точной нижней грани по всем допустимым функциям $h(t)$ и используя равенство из определения G-емкости, приходим к соотношению

$$\mathrm{cap}_G(P, \partial\Omega; \Omega) \geq \frac{\omega_{n-1}}{\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\alpha(t)}}. \tag{8}$$

Для доказательства обратного неравенства выберем допустимую в вариационной задаче (5) функцию $h_0(t) = \int\limits_{t}^{t_2} \frac{dt}{\alpha(t)} \Big/ \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\alpha(t)}$. Очевидно, что выполнено

$$\mathrm{cap}_G(P, \partial\Omega; \Omega) \leq \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha(t) (h_0(t))_t^2\, dt\ d\theta = \frac{\omega_{n-1}}{\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\alpha(t)}}.$$

Поэтому, сопоставляя найденное соотношение с неравенством (8), будем иметь равенство

$$\mathrm{cap}_G(P, \partial\Omega; \Omega) = \frac{\omega_{n-1}}{\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\alpha(t)}}.$$

Далее, применяя определение G-параболичности и устремляя t_1 к a и t_2 к b, приходим к выводу о параболичности экстремальной поверхности вращения при условии расходимости интегралов

$$\int\limits_{a}^{t_0} \frac{dt}{\alpha(t)} = \infty$$

и

$$\int\limits_{t_0}^{b} \frac{dt}{\alpha(t)} = \infty$$

при некотором $t_0 \in (a, b)$. Причем ее устойчивость и неустойчивость непосредственно следуют из определения.

Теорема доказана.

Пример 1. Минимальная поверхность (катеноид)

$$\vec{r}(t,\theta) = \{t, \operatorname{ch} t \cos\theta, \operatorname{ch} t \sin\theta\},$$

где $t \in (-\infty, +\infty)$, $\theta \in (0, 2\pi)$, является неустойчивой, так как функции $\alpha(t) = 1$ и $\beta(t) = \dfrac{2}{\operatorname{ch}^2 t} > 0$. Таким образом, заключаем, что интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{0} dt/\alpha(t) = \int\limits_{-\infty}^{0} dt, \ \int\limits_{0}^{+\infty} dt/\alpha(t) = \int\limits_{0}^{+\infty} dt$$

расходятся и минимальная поверхность неустойчива.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11-01-97021-р_поволжье_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдштейн, В. М. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения / В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк. — М. : Наука, 1983. — 284 с.
2. Клячин, В. А. Об одном емкостном признаке неустойчивости минимальных гиперповерхностей / В. А. Клячин, В. М. Миклюков // Докл. РАН. — 1993. — Т. 330, № 4. — С. 424–426.
3. Клячин, В. А. Об устойчивости экстремальных поверхностей некоторых функционалов типа площади / В. А. Клячин, Н. М. Медведева // Сибирские электронные математические известия. Статьи. — 2007. — Т. 4. — С. 113–132.
4. Клячин, В. А. Признаки неустойчивости поверхностей нулевой средней кривизны в искривленных лоренцевых произведениях / В. А. Клячин, В. М. Миклюков // Мат. сб. — 1996. — Т. 187, № 11. — С. 67–88.
5. Клячин, В. А. Условия конечности времени существования максимальных трубок и лент в искривленных лоренцевых произведениях / В. А. Клячин, В. М. Миклюков // Изв. РАН. Сер. мат. — 1994. — Т. 58, № 3. — С. 196–210.
6. Медведева, Н. М. Исследование устойчивости экстремальных поверхностей вращения / Н. М. Медведева // Изв. Сарат. ун-та. Серия «Математика. Механика. Информатика». Вып. 2. — 2007. — Т. 7. — С. 25–32.
7. Миклюков, В. М. Геометрический анализ поверхностей нулевой средней кривизны / В. М. Миклюков // Геометрический анализ. — 1999. — С. 5–22.
8. Миклюков, В. М. Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей / В. М. Миклюков // Изв. РАН. Сер. мат. — 1996. — Т. 60, № 4. — С. 111–158.
9. Миклюков, В. М. Некоторые свойства трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности / В. М. Миклюков, В. Г. Ткачев // Мат. сб. — 1989. — Т. 180, № 9. — С. 1278–1295.
10. Миклюков, В. М. О некоторых свойствах трубчатых минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^n$ / В. М. Миклюков // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 247, № 3. — С. 549–552.

11. Полубоярова, Н. М. Исследование устойчивости n-мерных экстремальных поверхностей вращения / Н. М. Полубоярова // Изв. вузов. Математика. — 2011. — № 2. — С. 106–109.
12. Саранин, В. А. Равновесие жидкостей и его устойчивость / В. А. Саранин. — М. : Ин-т компьютер. исследований, 2002. — 144 с.
13. Ткачев, В. Г. Минимальные поверхности конечного проективного объема / В. Г. Ткачев // Геометрический анализ. — 1999. — С. 369–410.
14. Финн, Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория / Р. Финн. — М. : Мир, 1989. — 312 с.
15. Simons, J. Minimal varieties in riemannian manifolds / J. Simons // Ann. of Math. — 1968. — V. 88, № 1. — P. 62–105.
16. Tkachev, V. G. Finiteness of the number of ends of minimal submanifolds in Euclidean space / V. G. Tkachev // Manuscr. Mathem. — 1994. — V. 82. — P. 313–330.

SOME ESTIMATES OF *G*-CAPACITY ON EXTREMAL SURFACES AND ITS APPLICATIONS

N.M. Poluboyarova

In this paper we consider G-capacity of condenser on the extremal surfaces of the area type functional. We obtain the feature of stability and instability for extremal surfaces with the help estimates of G-capacity.

Key words: *area type functional, functional variation, extremal surface, stable (instable) extremal surface, G-capacity of condenser.*