УДК 513.83
ББК 22.152

# О КОЛЛЕКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОСТИ ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ

*В.В. Попов*

Доказано, что если $X$ — тихоновское пространство, $Y$ — метризуемый компакт и пространство $C_p(X,Y)$ непрерывных отображений пространства $X$ в пространство $Y$ в топологии поточечной сходимости нормально, то оно коллективно нормально.

***Ключевые слова:*** *пространство непрерывных функций, топология поточечной сходимости, нормальное пространство, коллективно нормальное пространство, метризуемый компакт.*

В работе [1, с. 48, I.5.16] А.В. Архангельский поставил следующий вопрос: Пусть $X$ — тихоновское пространство и пространство $C_p(X,\{0,1\})$ нормально. Обязано ли оно быть коллективно нормальным? Положительный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

**Основная теорема.** Пусть пространство $C_p(X,Y)$ нормально, $X$ — тихоновское пространство, а $Y$ — метризуемый компакт. Тогда $C_p(X,Y)$ коллективно нормально.

### Предварительные результаты

Все рассматриваемые ниже пространства предполагаются тихоновскими. Спрэд $s(X)$ пространства $X$ — это наименьший бесконечный кардинал $\tau$, для которого $|Y| \leq \tau$ для любого дискретного в себе подпространства $Y \subset X$. Экстент $e(X)$ пространства $X$ — это наименьший бесконечный кардинал $\tau$, для которого $|Y| \leq \tau$ для любого замкнутого дискретного подпространства $Y \subset X$. Через $w(X)$, $nw(x)$ и $\chi(X)$ обозначаются, соответственно, вес, сетевой вес и характер пространства $X$; $\beta X$ — стоун-чеховское расширение (тихоновского) пространства $X$. Подмножества $A, B \subset X$ называются вполне отделимыми, если $[A]_{\beta X} \cap [B]_{\beta X} = \emptyset$.

Пусть $Y^X = \prod\{Y_x = Y : x \in X\}$ — декартово произведение $|X|$ экземпляров тихоновского пространства $Y$. Стандартную базу топологии пространства $Y^X$ образуют множества вида

$$W = \prod\{W_x : x \in X\},$$

где каждое $W_x$ является открытым подмножеством пространства $Y$ и множество $\operatorname{supp} W = \{x \in X : W_x \neq Y\}$ конечно.

Если $A \subset X$, то $p_A$ — это естественное проектирование $Y^X \to Y^A$. Скажем, что подмножество $\mathcal{E}$ пространства $Y^X$ удовлетворяет условию (*), если для всех вполне отделимых множеств $A, B \subset X$ и любых элементов $f, g \in \mathcal{E}$ найдется $h \in \mathcal{E}$, для которого $h|A = f|A$ и $h|B = g|B$. Ясно, что условие (*) выполнено, если $\mathcal{E} = C_p(X, Y)$. Остальные определения и обозначения можно найти в [1; 3].

Из следствия 1 работы [2] вытекает следующая лемма.

**Лемма 1.** *Пусть $f : Y \to R$ — непрерывная функция, где $Y$ — плотное подмножество произведения $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ метризуемых пространств со счетной базой. Тогда $f$ зависит от счетного числа координат, то есть найдется счетное $M \subset X$ и непрерывная функция $g : p_M(Y) \to R$, для которых $f = g \circ p_M$, где $p_M : X \to \to \prod\{X_\alpha : \alpha \in M\}$ — проектирование.*

В дальнейшем потребуется следующая версия теоремы Корсона [1, с. 48, теорема I.5.17]:

**Предложение 1.** *Пусть $Y_i$ — плотное подмножество произведения $X_i = \prod\{X_i^t : t \in \in A_i\}$ тихоновских пространств, где $i = 1, 2$. Пусть для любых счетных подмножеств $M_1 \subset A_1$ и $M_2 \subset A_2$ пространство $\prod\{X_i^t : t \in M_i, i = 1, 2\}$ наследственно сепарабельно. Пусть $Z_i = \varphi_i(Y_i)$, где $\varphi_i : Y_i \to Z_i$ непрерывные отображения при $i = 1, 2$, а пространство $Z_1 \times Z_2$ нормально. Тогда $e(Z_1) \leq \omega_0$ или $e(Z_2) \leq \omega_0$.*

***Доказательство.*** Предположим противное. Тогда при $i = 1, 2$ найдутся множества $D_i = \{y_i^\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset Y_i$, для которых множества $\varphi_i(D_i)$ замкнуты и дискретны в $Z_i$ и ограничения $\varphi_i|D_i$ отображений $\varphi_i$ взаимно однозначны. Пусть $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2 : Y = Y_1 \times \times Y_2 \to Z_1 \times Z_2$ — произведение отображений, $D = D_1 \times D_2$ и $\triangle = \{(y_1^\alpha, y_2^\alpha) : \alpha < \omega_1\}$. Тогда $S = \varphi(D \setminus \triangle)$ и $T = \varphi(\triangle)$ — дизъюнктные замкнутые подмножества нормального пространства $Z = Z_1 \times Z_2$. Поэтому найдется непрерывная функция $h : Z \to R$, для которой $h(S) = \{1\}$ и $h(T) = \{0\}$. Положим $f = h \circ \varphi : Y \to R$. По лемме 1 найдется счетное множество $M \subset A_1 \cup A_2$ и непрерывное отображение $g : p_M(Y) \to R$, для которых $f = g \circ (p_M|Y)$.

Так как $|M| \leq \omega_0$, пространство $p_M(Y)$ наследственно сепарабельно и $|\triangle| > \omega_0$, получаем, что $p_M(y) \in [p_M(\triangle \setminus \{y\})]$ для некоторой точки $y = (y_1^\alpha, y_2^\alpha) \in \triangle$. Так как $f(y) \in f(\triangle) \subset R \setminus [f(D \setminus \triangle)]$ и $g$ непрерывно, найдутся открытые множества $U_i \subset p_M(X_i), i = 1, 2$, для которых $p_M(y) \in U_1 \times U_2$ и множество $g((U_1 \times U_2) \cap p_M(Y))$ дизъюнктно с $f(D \setminus \triangle)$.

Выберем точку $y' = (y_1^\beta, y_2^\beta) \in \triangle \setminus \{y\}$, для которой $p_M(y') \in U_1 \times U_2$. Тогда $\alpha \neq \beta$ и мы получаем $y'' \in D \setminus \triangle$, где $y'' = (y_1^\alpha, y_2^\beta)$. Ясно, что $p_M(y'') \in U_1 \times U_2$ и поэтому $f(y'') = g(p_M(y'')) \subset g((U_1 \times U_2) \cap p_M(Y)) \subset R \setminus f(D \setminus \triangle))$. Противоречие с $y'' \in D \setminus \triangle$ завершает доказательство предложения 1.

**Предложение 2.** *Пусть $f = f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ — непрерывное отображение в пространство $Y_1 \times Y_2$ со счетным спрэдом. Пусть $D_1 = \{x_1^\alpha : \alpha < \omega_1\}$ и $D_2 = \{x_2^\alpha : : \alpha < \omega_1\}$ — несчетные замкнутые дискретные подмножества пространств $X_1$ и $X_2$ соответственно. Тогда $f(\triangle) \cap [f(D \setminus \triangle)] \neq \emptyset$, где $D = D_1 \times D_2$ и $\triangle = \{(x_1^\alpha, x_2^\alpha) : \alpha < < \omega_1\}$.*

***Доказательство.*** Не теряя общности, считаем, что $x_i^\alpha \neq x_i^\beta$ при любых различных $\alpha$, $\beta$ и $i = 1, 2$. Так как $s(Y_1 \times Y_2) \leq \omega_0$, найдется точка $x \in \triangle$, для которой $f(x) \in [f(\triangle \setminus \setminus \{x\})]$. Пусть $U = U_1 \times U_2$ — базисная окрестность точки $y = f(x)$. Тогда $f(x') \in U$ для некоторой точки $x' \in \triangle \setminus \{x\}$. Пусть $x = (x_1^\alpha, x_2^\alpha)$ и $x' = (x_1^\beta, x_2^\beta)$. Ясно, что $\alpha \neq \beta$ и $f(x_1^\alpha, x_2^\beta) \in U \cap f(D \setminus \triangle)$. Поэтому $y \in f(\triangle) \cap [f(D \setminus \triangle)]$. Предложение 2 доказано.

**Следствие 1.** *Пусть $Y_1, Y_2$ — плотные подмножества пространств $R^A$ и $R^B$ соответственно и $e(Y_i) > \omega_0$ при $i = 1, 2$. Тогда пространство $Y_1 \times Y_2$ не нормально.*

**Лемма 2.** *Пусть $s(X_1) \leq \omega_0$ и $nw(X_2) \leq \omega_0$. Тогда $s(X_1 \times X_2) \leq \omega_0$.*

***Доказательство.*** Предположим противное. Пусть $A = \{(x_t, y_t) : t \in T\}$ — несчетное дискретное (в себе) подмножество пространства $X_1 \times X_2$ и $\{U_t \times V_t : t \in T\}$ — такое семейство открытых подмножеств $X_1 \times X_2$, что $s, t \in T$ и $(x_s, y_s) \in U_t \times V_t$ влечет $s = t$. Пусть $\mathcal{P}$ — счетная сеть пространства $X_2$. Для любого $t \in T$ найдется элемент $S$ сети $\mathcal{P}$, для которого $y_t \in S \subset V_t$. Поэтому существует несчетное семейство $T' \subset T$ и элемент $S_0 \in \mathcal{P}$, для которых $y_t \in S_0 \subset V_t$ для всех $t \in T'$. Тогда из условий $s, t \in T'$ и $x_s \in U_t$ следует $s = t$. Значит, $\{x_s : s \in T'\}$ — дискретное в себе несчетное подмножество пространства $X_1$. Противоречие с $s(X_1) \leq \omega_0$ завершает доказательство леммы.

## Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 1 разбивается на отдельные шаги. После формулировки очередного свойства приводится его доказательство. Для краткости полагаем $\mathcal{E} = C_p(X, Y)$. Через $\mathcal{L}$ обозначается семейство таких подмножеств $L \subset X$, что $e(p_L(\mathcal{E})) \leq \omega_0$. Наша цель — показать, что $X \in \mathcal{L}$.

(1) *Пусть $B \subset X$ — конечное множество. Тогда $p_B(\mathcal{E})$ гомеоморфно пространству $Y^B$.*

Это доказывается индукцией по числу элементов множества $B$ с использованием свойства (*).

(2) *Пусть $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ — дизъюнктные замкнутые подпространства пространства $\mathcal{E}$. Тогда найдется такое счетное множество $M \subset X$, что $p_M(\mathcal{E}_1) \cap [p_M(\mathcal{E}_2)] = \emptyset$ (где $p_M : Y^X \to Y^M$ — проектирование).*

***Доказательство.*** Так как пространство $\mathcal{E}$ нормально, найдется непрерывная функция $f : \mathcal{E} \to R$, для которой $f(\mathcal{E}_1) = \{0\}$ и $f(\mathcal{E}_2) = \{1\}$. Из (1) следует, что $\mathcal{E}$ — плотное подмножество произведения $\prod\{Y_x : x \in X\}$ пространств счетного веса. Пусть счетное множество $M \subset X$ выбрано в соответствии с леммой 1 для подмножества $\mathcal{E}$ произведения $\prod\{Y_x : x \in X\}$ и функции $f$. Тогда $M$ — искомое множество.

В.В. Успенский доказал, что если $Z$ — замкнутое подпространство тихоновского пространства $X$ и пространство $C_p(X)$ нормально, то и пространство $p_Z(C_p(X))$ нормально [1, с. 52, теорема I.6.2]. Используя его метод, получаем свойство (3).

(3) *Пусть $E$ — замкнутое подпространство пространства $X$. Тогда пространство $p_E(\mathcal{E})$ нормально.*

Из (3), свойства (*) и предложений 1, 2 вытекает следующее свойство.

(4) *Пусть* $A, B \subset X$ — *замкнутые вполне отделимые подмножества* $X$. *Тогда* $e(p_A(\mathcal{E})) \leq \omega_0$ *или* $e(p_B(\mathcal{E})) \leq \omega_0$.

(5) *Пусть* $L$ — *замкнутое подмножество пространства* $X$ *и* $p = p_L : Y^X \to \to Y^L$ — *проектирование. Тогда эквивалентны следующие условия:*
*(a)* $e(p(\mathcal{E})) \leq \omega_0$*;*
*(b)* $s(p(\mathcal{F})) \leq \omega_0$ *для всех замкнутых дискретных множеств* $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$*;*
*(c)* $e(p(\mathcal{F})) \leq \omega_0$ *для всех замкнутых дискретных множеств* $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$.

***Доказательство.*** (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть $\mathcal{F}$ — такое замкнутое дискретное подпространство $\mathcal{E}$, что $p(\mathcal{F})$ дискретно в себе и ограничение $p|\mathcal{F}$ взаимно однозначно. Допустим, что $|\mathcal{F}| > \omega_0$. Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{E} \cap p^{-1}(P)$, где $P$ — множество всех предельных точек множества $p(\mathcal{F})$ в $Y^L$. Тогда $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ — дизъюнктные замкнутые подмножества $\mathcal{E}$. Из свойства (2) вытекает существование счетного $M \subset X$, для которого $p_M(\mathcal{F}) \cap [p_M(\mathcal{H})] = \emptyset$.

Так как $Y^X$ регулярно, для любой функции $f \in \mathcal{F}$ найдется элемент $U_f$ стандартной базы топологии на $Y^X$, для которого $f \in U_f$, $[U_f] \cap \mathcal{H} = \emptyset$ и множество $k_f = \mathrm{supp}(U_f)$ лежит в $M$. Так как $|M| \leq \omega_0$ и каждое $k_f$ конечно, найдется конечное $k \subset M$ и несчетное $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$, для которых $k_f = k$ для всех $f \in \mathcal{F}_1$.
Пусть $q : \mathrm{Y}^X \to \mathrm{Y}^k$ — проектирование. Так как произведение $\prod\{Y_x : x \in k\}$ имеет счетную сеть и $\{q(U_f) : f \in \mathcal{F}\}$ — открытое покрытие финально компактного пространства $q(\mathcal{F}_1)$, найдется такое $g \in \mathcal{F}_1$, для которого множество $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 \cap q^{-1}q(U_g)$ несчетно.

Так как $e(p(\mathcal{E})) \leq \omega_0$ и $|p(\mathcal{F}_2)| > \omega_0$, найдется $h_0 \in \mathcal{E}$, для которого $p(h_0) \in [p(\mathcal{F}_2) \setminus \setminus \{p(h_0)\}]$. Используя условие (*), выберем функцию $h \in \mathcal{E}$, для которой $h|L = h_0|L$ и $h(x) = g(x)$ при любом $x \in k \setminus L$. Ясно, что $p(h) = p(h_0) \in P$ и $q(h) \in [q(\mathcal{F}_2)] \subset [q(U_g)]$. Из $k_g = k$ получаем $h \in [U_g]$. Следовательно, $\mathcal{H} \cap [U_g] \supset \{h\} \neq \emptyset$. Противоречие с выбором $U_g$ завершает доказательство.

(b) $\Rightarrow$(c) — очевидно.

(c) $\Rightarrow$(a). Предположим, что $p(\mathcal{E})$ содержит некоторое несчетное замкнутое дискретное в себе множество $\mathcal{F}_0$. Выберем $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ такое, что $p(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_0$ и $p|\mathcal{F}$ взаимно однозначно. Тогда $\mathcal{F}$ — несчетное замкнутое дискретное подмножество $\mathcal{E}$, причем $e(p(\mathcal{F})) \geq |\mathcal{F}_0| > \omega_0$. Противоречие с (a) завершает доказательство свойства (5).

(6) *Пусть* $L \in \mathcal{L}$ *и* $\mathcal{F}$ — *несчетное замкнутое дискретное подмножество* $\mathcal{E}$. *Тогда* $p_L(f) \in [p_L(\mathcal{F} \setminus \{f\})]$ *для некоторого* $f \in \mathcal{F}$.

***Доказательство.*** Из $L \in \mathcal{L}$ получаем $e(p(\mathcal{E})) \leq \omega_0$ и свойство (5) дает $s(p(\mathcal{F})) \leq \omega_0$, поэтому $p(\mathcal{F})$ или счетно, или не является дискретным в себе подпространством. Отсюда легко вытекает заключение свойства (6).

(7) *Пусть* $L$ — *замкнутое подмножество* $X$*,* $L \in \mathcal{L}$*,* $k \subset X \setminus [L]$ *и* $k$ *конечно. Тогда* $L \cup k \in \mathcal{L}$.

***Доказательство.*** Пусть $p : Y^X \to Y^L$ и $q : Y^X \to Y^{L \cup k}$ — проектирование. Пусть $\mathcal{F}$ — замкнутое дискретное подмножество $\mathcal{E}$. Ввиду свойства (*) $q(\mathcal{F})$ гомеоморфно подпространству произведения $Z = p(\mathcal{F}) \times \prod\{Y_x : x \in k\}$. Из $L \in \mathcal{L}$ получаем $s(p(\mathcal{F})) \leq \leq \omega_0$ (см. (5) ). Теперь из леммы 2 и неравенства $nw(\prod\{Y_x : x \in k\} \leq \omega_0$ вытекает $s(Z) \leq \omega_0$. Следовательно, $e(q(\mathcal{F})) \leq s(q(\mathcal{F})) \leq s(Z) \leq \omega_0$ и поэтому $L \cup k \in \mathcal{L}$. Свойство (7) доказано.

(8) *Пусть* $L = \cup\{L_n : n \in N\}$, *где* $L_n \in \mathcal{L}$ *и* $L_n \subset L_{n+1}$ *для всех* $n \in N$. *Тогда* $L \in \mathcal{L}$.

***Доказательство.*** Предположим противное. Тогда найдется несчетное замкнутое дискретное $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, такое, что для всех $f \in \mathcal{F}$ найдется элемент $U_f$ канонической базы $Y^X$, для которого $U_f \cap \mathcal{F} = \{f\}$ и $k_f = \mathrm{supp}(U_f) \subset L$. Так как $|\mathcal{F}| > \omega_0$ и каждое $k_f$ конечно, найдется $m \in N$ и несчетное $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$, для которого $k_f \subset L_m$ для всех $f \in \mathcal{F}_1$. Так как $L_m \in \mathcal{L}$ и $|\mathcal{F}_1| > \omega_0$, можно выбрать $f \in \mathcal{F}_1$ с условием $q_m(f) \in [q_m(\mathcal{F}_1 \setminus \{f\})]$ (см. (6)), где $q_m : Y^X \to \mathrm{Y}^{L_m}$ — проектирование. Так как $k_f \subset L_m$, получаем $|U_f \cap \mathcal{F}_1| > \omega_0$. Но $|U_f \cap \mathcal{F}_1| \leq |U_f \cap \mathcal{F}| = 1$. Полученное противоречие завершает доказательство свойства (8).

Из (7) и (8) получаем:

(9) *Пусть* $\mathcal{P}$ — *счетное семейство подмножеств* $X$ *и* $\cup\mathcal{P}_0 \in \mathcal{L}$ *для любого конечного* $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$. *Пусть* $B \subset X$ *и* $|B| \leq \omega_0$. *Тогда* $B \cup (\cup\mathcal{P}) \in \mathcal{L}$.

(10) *Допустим, что* $e(\mathcal{E}) > \omega_0$. *Пусть* $A \subset \beta X$ — *некоторое конечное множество. Тогда найдется замкнутое (в* $X$*) множество* $E \subset X$, *для которого* $E \notin \mathcal{L}$ *и* $A \cap [E]_{\beta X} = \emptyset$.

***Доказательство.*** Допустим противное. Тогда верно следующее свойство:

(a) $X \setminus OA \in \mathcal{L}$ для любой окрестности $OA$ множества $A$ в $\beta X$.

Выберем замкнутое дискретное $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ мощности $\omega_1$. Для $f \in \mathcal{F}$ пусть $\tilde{f} : \beta X \to$ $\to Y$ — продолжение непрерывного отображения $f : X \to Y$ на чех-стоуновскую компактификацию $\beta X$ пространства $X$.

Пусть $t \in A$. Положим $G_t = \cap\{\tilde{f}^{-1}\tilde{f}(t) : f \in \mathcal{F}\}$. Тогда множество $G_t$ замкнуто в $\beta X$ (как пересечение замкнутых множеств) и из соотношений $\chi(Y) \leq \omega_0 < \omega_1$ и $|\mathcal{F}| \leq$ $\leq \omega_1$ следует $\chi(G_t, \beta X) \leq \omega_1$. Поэтому $G = \cup\{G_t : t \in A\}$ — замкнутое подмножество $\beta X$ характера $\leq \omega_1$. Поэтому найдется семейство $\mathcal{R} = \{R_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ замкнутых подмножеств $X$, для которого $X \setminus G = \cup\mathcal{R}$ и $A \cap [R_\alpha]_{\beta X} = \emptyset$ для всех $\alpha$. Из (a) получаем: $\cup\mathcal{R}_0 \in \mathcal{L}$ для всех конечных подсемейств $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}$, и (9) дает нам $X_\alpha \in \mathcal{L}$ для всех $\alpha < \omega_1$, где $X_\alpha = B \cup \cup\{R_\beta : \beta < \alpha\}$.

Положим $A' = \{t \in A : G_t \cap X \neq \emptyset\}$ и выберем конечное множество $B \subset X$, для которого $B \cap G_t \neq \emptyset$ для всех $t \in A'$. Тогда выполнено свойство

(b) $\tilde{f}(G_t) = \{\tilde{f}(t)\} = f(B \cap G_t)$ для всех $t \in A'$ и любой функции $f \in \mathcal{F}$.

Разобъем $\mathcal{F}$ на $\omega_1$ частей: $\mathcal{F} = \cup\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, где $|\mathcal{F}_\alpha| = \omega_1$ и $\mathcal{F}_\alpha \cap \mathcal{F}_\beta = \emptyset$ для всех $\alpha < \beta < \omega_1$. По свойству (6) для всех $\alpha$ можно выбрать $f_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$, для которого $q_\alpha(f_\alpha) \in [q_\alpha(\mathcal{F}_\alpha \setminus \{f_\alpha\})]$, где $q_\alpha : Y^X \to Y^{X_\alpha}$ — проектирование.

Тогда $\mathcal{F}^1 = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ и $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}^1$ — дизъюнктные замкнутые подмножества $\mathcal{E}$. По свойству (2) найдется счетное $M \subset X$, для которого $p_M(\mathcal{F}^1) \cap [p_M(\mathcal{F}^2)] = \emptyset$.

Так как $\alpha < \beta < \omega_1$ влечет $X_\alpha \subset X_\beta$ и $X \setminus G = \cup\{X_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, найдется ординал $\gamma < \omega_1$ такой, что $M \setminus G \subset X_\gamma$. Тогда из $q_\gamma(f_\gamma) \in [q_\gamma(\mathcal{F}_\gamma) \setminus \{f_\gamma\}]$, свойства (b) и $B \subset X_\gamma$ следует, что $p_M(f_\gamma) \in [p_M(\mathcal{F}_\gamma)]$ и из $f_\gamma \in \mathcal{F}^1$ и $\mathcal{F}_\gamma \setminus \{f_\gamma\} \subset \mathcal{F}^2$ получаем $p_M(\mathcal{F}^1) \cap$ $\cap [p_M(\mathcal{F}^2)] \neq \emptyset$. Противоречие с выбором $M$ завершает доказательство свойства (10).

(11) *Пусть* $e(\mathcal{E}) > \omega_0$. *Тогда существуют замкнутые в* $X$ *вполне отделимые множества* $E, L \subset X$, *для которых* $E, L \in \mathcal{L}$.

***Доказательство.*** Выберем несчетное замкнутое дискретное множество $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$. Так как $\mathcal{F}$ дискретно в себе, для всякого $f \in \mathcal{F}$ найдется конечное множество $k_f \subset X$, для которого $q_f(f) \notin [q_f(\mathcal{F} \setminus \{f\})]$, где $q_f : Y^X \to Y^{k_f}$ — проектирование.
Так как $|\mathcal{F}| > \omega_0$, найдется $n \in N$ и несчетное $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$, для которых $|k_f| \leq n$ для всех $f \in \mathcal{F}_0$.

Пусть $\exp \beta X$ — пространство замкнутых подмножеств пространства $\beta X$ в топологии Виеториса. Так как $\exp \beta X$ — компакт [3], несчетное множество $\{k_f : f \in \mathcal{F}_0\}$ имеет некоторую точку полного накопления $A \subset \beta X$. Ясно, что $|A| \leq n$. Поэтому $A$ конечно. По свойству (10) найдется такое замкнутое множество $E \subset X$, для которого $E \notin \mathcal{L}$ и $[E]_{\beta X} \cap A = \emptyset$. Выберем открытое множество $U \subset \beta X$, для которого $A \subset U$ и $[U]_{\beta X} \cap [E]_{\beta X} = \emptyset$. Пусть $L = [U]_{\beta X} \cap X$ и $p' : Y^X \to Y^L$ — проектирование.
Тогда множество $\mathcal{F}_1 = \{f \in \mathcal{F}_0 : k_f \subset L\}$ несчетно и $p'(\mathcal{F}_1)$ дискретно в себе. Следовательно, $s(p'(\mathcal{F})) \geq |\mathcal{F}_1| > \omega_0$ и (5) дает $L \notin \mathcal{L}$. Ясно, что множества $E$ и $L$ — искомые. Свойство (11) доказано.

***Доказательство основной теоремы***. Предположим, что $e(\mathcal{E}) > \omega_0$. Пусть множества $E$ и $L$ выбраны в соответствии со свойством (11). Применяя предложение 1 к произведениям $\prod\{Y_x : x \in E\}$, $\prod\{Y_x : x \in L\}$ и их плотным подпространствам $p_E(\mathcal{E})$ и $p_L(\mathcal{E})$, заключаем, что произведение $p_E(\mathcal{E}) \times p_L(\mathcal{E})$ не нормально. Но это произведение гомеоморфно пространству $p_{E\cup L}(\mathcal{E})$ (см. условие (*)), которое нормально по свойству (3). Противоречие показывает, что $e(\mathcal{E}) \leq \omega_0$. Для завершения доказательства осталось отметить, что любое нормальное пространство со счетным экстентом коллективно нормально. Теорема доказана.

## *СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*


1. Архангельский, А. В. Топологические пространства функций / А. В. Архангельский. — М. : Изд-во МГУ, 1989. — 222 с.
2. Архангельский, А. В. Непрерывные отображения, факторизационные теоремы и пространства функций / А. В. Архангельский // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1984. — Т. 47. — С. 3–22.
3. Энгелькинг, Р. Общая топология / Р. Энгелькинг. — М. : Мир, 1986. — 752 с.


## ON COLLECTIWISE NORMALITY OF FUNCTION SPACES

*V.V. Popov*

It proves, that if $X$ is a Tychonoff space, $Y$ is a compact with a countable base and the space $C_p(X,Y)$ is normal, then it is collectionwise normal.

***Key words:*** *the space of continuous functions, pointwise convergence, normal space, collectionwise normal space, metrizable compact space.*